

Exercice 1 (Convergences uniforme de suites : pratique)

- 1) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = [0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n(1 - x)$$

- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)$$

On essayera d'éviter tout calcul de norme infinie.

- 3) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I =]0, 1]$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right)$$

- 4) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{n + 1}$$

On étudiera aussi la convergence uniforme sur $[-a, a]$ pour $a > 0$ assez grand (à déterminer).

- 5) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Étudier la convergence sur tout segment de \mathbb{R}_+ .

Exercice 2 1) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2) .

- 2) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et (f_n) une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} . On suppose que (f_n) converge uniformément vers f , bornée sur I . Montrer que (f_n^2) converge uniformément vers f^2 .

Indication : Montrer que $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$.

Exercice 3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions qui convergent uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- 1) Rappeler l'inégalité des accroissements finis dans le cas de $\varphi(u) = \ln(1 + u)$ entre deux réels positifs.
- 2) Montrer que $(\ln(1 + f_n))_n$ converge uniformément vers $\ln(1 + f)$.

Exercice 4 (Suites et intégrales)

- 1) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

On évitera un calcul de norme infinie en étudiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.

- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = \sin^n x$.

Étudier la limite de la suite $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt\right)$.

- 3) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Calculer la limite de la suite $\left(n \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx\right)$.

Exercice 5 (Suites et dérivées)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.

- 1) Étudiez la convergence uniforme de (f_n) .
- 2) Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables?
- 3) A-t-on convergence de la suite des (f'_n) ? Que se passe-t-il sur un segment de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 6

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$1) u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx$$

$$2) u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$$

$$3) v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx$$

$$4) w_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$$

Exercice 7 (Convergences de séries : pratique)

Domaine de définition et domaine de convergence normale des séries de fonctions $\sum f_n$, pour les f_n suivantes. On précisera l'intervalle sur lequel la fonction somme est continue.

- 1) $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
- 3) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$. On comparera $S(x)$ et $S(1/x)$. Limite en $+\infty$ de la somme.

Exercice 8

Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on définit $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$.

Pour $n \geq 1$, on définit $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$.

- 1) Nature et valeur de $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.
- 2) Domaine de définition de la série de fonctions $\sum f_n$. On note $S(x)$ sa somme.
- 3) Continuité de S (on précisera l'intervalle).
- 4) A l'aide d'un encadrement, montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 9

Soit $u_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition I de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
- 2) Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , et exprimez S' sans symbole de sommation.
- 3) Montrer que S est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- 4) Déduire S de l'expression de S' et d'un calcul judicieusement choisi.

Exercice 10

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- 1) Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . (fait en cours)
- 2) Préciser le sens de variation de S .

3) Établir

$$\forall x > 0, \quad S(x+1) + S(x) = 1/x$$

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$. Indication : *S'inspirer de l'exercice $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$.*

Exercice 11 (Fonction vérifiant une équation arbitraire)

On définit (u_n) suite de fonctions de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} par

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) \, dt$$

1) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq t - t^2 \leq t \leq 1$. Indication : *Faire au besoin un tableau de variations de $h(t) = t - t^2$.*

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Étudier la convergence simple de la série $\sum v_n$, où $v_n = u_{n+1} - u_n$, sur $[0, 1]$. En déduire la convergence de la suite $(u_n(x))$ pour tout $x \in [0, 1]$.

4) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 12 (CCINP PSI 2020)

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . On note S sa somme.

2) Soit $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

Indication : *Penser à la quantité conjuguée.*

Exercice 13

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que u_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que

$$\int_0^{+\infty} u_n(t) \, dt = \frac{1}{n^2}$$

2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 14

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Soit $I = \int_0^1 x^x \, dx$.

1) Montrer que I converge.

2) À l'aide de l'égalité (que l'on montrera lors du cours sur les séries entières) $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, montrer que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \ln x)^n dx$$

3) Soit $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x dx$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec $p > 0$ si $q > 0$.

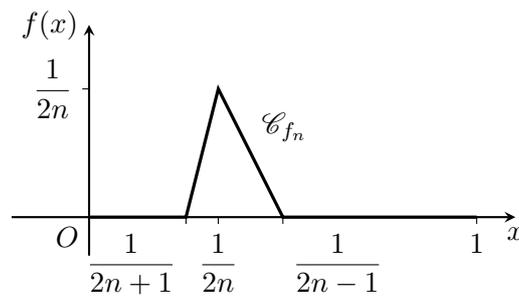
Obtenir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$. En déduire $I_{n,n}$.

4) Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

5) Sur le même modèle, déterminer une expression de $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$ sous forme d'une série numérique.

Exercice 15 (Convergence absolue uniforme)

Pour $n \geq 2$ on définit $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 0$ sauf sur $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}\right]$ où son graphe forme un triangle de hauteur $\frac{1}{2n}$ en $x = \frac{1}{2n}$.



1) Montrer que la série de terme général f_n ne converge pas normalement.

2) Montrer que cette série converge uniformément absolument, c'est-à-dire que $\sum |f_n|$ converge uniformément, sur $[0,1]$.

Exercice 16 (Résidus)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \neq |z_0|$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z_0 - re^{i\theta}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < |z_0| \\ \frac{2\pi}{z_0} & \text{si } r > |z_0| \end{cases}$$

Faites un dessin, en plaçant dans le plan complexe z_0 et $\{re^{i\theta} | \theta \in [0, 2\pi]\}$. Vous constaterez que, dans un cas, z_0 est à l'extérieur du disque, et dans le second cas, z_0 est à l'intérieur. Le point z_0 est le pôle de la fraction rationnelle $\frac{1}{z_0 - X}$, et le résultat qui précède est une première approche du théorème des résidus.