

Exercice 1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ . Étudier $(|u_n|)$ (écrire la définition de la limite, avec des ε).

Exercice 2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.

- 1) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?
- 2) Si (u_{2n}) , (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?

Exercice 3

Soit (u_n) une suite croissante dont une suite extraite converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 4 (Cesàro) 1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Montrer que $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ converge vers 0.

2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeante, de limite ℓ . Montrer que $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ converge vers ℓ . On pourra se ramener à $\ell = 0$ pour appliquer le 1).

3) La réciproque du théorème précédent est-elle vraie ?

Exercice 5

Convergence et limites éventuelles des suites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $u_n = (-1)^n (\ln n)^{(-1)^n}$ | 2) $u_n = \cos \left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1} \pi \right)$ | 3) $u_n = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 4) $u_n = \frac{n^p}{n!}$ où $p \in \mathbb{N}$ fixé. | 5) $u_n = \left(\frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3} \sin n \right)^n$ | 6) $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ |

Exercice 6 1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.
- b) Montrer que (u_n) est croissante.
- c) En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes. On pourra commencer par résoudre $f(x) = x$ pour distinguer des cas.

- | | |
|--|--|
| a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}$ | b) $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$ |
| c) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (<u>Indication</u> : discuter selon u_1 , après avoir trouvé les points fixes de f) | |

Exercice 7 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On notera ℓ cette solution.
- c) Montrer que $\exists k \in [0, 1[\forall n \in \mathbb{N} |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$.
- d) En déduire que (u_n) converge vers ℓ .

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes

- a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2 + 1}$

Exercice 8 1) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

2) En déduire les limites des suites suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \dots (n+n)}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Exercice 9

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie, lorsque c'est possible, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$.

- 1) Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle constante ?
- 2) Montrer que si $u_0 \neq -2$, alors $u_n \neq -2 \forall n \in \mathbb{N}$.
- 3) On suppose $u_0 \neq -2$ et on définit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Étudier (v_n) , en déduire l'expression de u_n en fonction de n et finir l'étude de (u_n) .
- 4) Pour quels u_0 la suite (u_n) est-elle définie ?

Exercice 10 (Vrai-Faux)

Soit (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (et le prouver) :

- 1) (u_n) non majorée $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2) (u_n) croissante non majorée $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- 4) $(\forall n, u_n \geq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0) \implies (u_n)$ décroissante.
- 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies u_n \sim u_{n+1}$.
- 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1} - U_n) = 0$ (et réciproquement ?)
- 7) $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)$ converge $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. (et réciproquement ?)

Exercice 11

Convergence et limite des suites suivantes :

$$1) u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$$

$$2) u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 12

Limite et éventuellement équivalent en $+\infty$ des suites suivantes :

$$1) u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \quad 2) u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad 3) u_n \text{ vérifiant l'encadrement } n\pi \leq u_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Exercice 13 (Oral petites mines 2012)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une racine dans $]0, 1[$ et une racine dans $]1, +\infty[$. On les notera x_n et y_n respectivement.
- 2) Déterminer la limite et un équivalent de (x_n) .
- 3) Déterminer la limite ℓ de (y_n) , puis un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 14

Soit (u_n) , (v_n) , (u'_n) et (v'_n) des suites de réels *strictement positifs*. Montrer que, si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.