Corrections : Séries entières

Exercice 2 (Rayons de convergence)
D'Alembert.

1) 1 **2)** 1 **3)** 1, **4)** 3,

5) *cf.* QC, **6)** QC, **7)** 0 **8)** 2

Somme du 1 : Dérivée de $x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n$, ou autre idée du même type.

Exercice 4 (Calculs de sommes)
6) Pour le rayon : commencer par majorer $|u_n|$ par $v_n = \dfrac{|x|^n}{n!|\sin a|^n}$, puis D'Alembert sur v_n.
Pour la somme, en notant a_n les coefficients de la première et b_n ceux de la seconde, regarder $a_n + ib_n$.

Exercice 5 (Développements en série entière)
Bien citer : par théorème de dérivation/intégration terme à terme des séries entières, $\forall x \in]-R, R[, \dots$

1) $R = 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$, **2)** $R = +\infty$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}t^{2n+1}$, **3)** Linéariser,

4) $\Re(e^{(1+i)x})$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, **5)** Dériver ou $(1+x)^\alpha$, **6)** Comme 1),

7) Produit de Cauchy.

Exercice 7 (Équations différentielles)
Bien citer : par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, par unicité du développement en série entière. Bien décaler les indices !

1) $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $\forall n \geqslant 2$, $(n+1)a_{n+1} - a_{n-2} = 0$, puis $R = +\infty$ et $f(x) = e^{x^3/3}$.

2) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $\forall n \geqslant 2$, $n(n+1)a_n + a_{n-2} = 0$.

3) Sur $]-1, 1[$, $\dfrac{x^2}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}x^n$ puis $(n-1)a_n = 1$ pour $n \geqslant 2$, et $a_0 = 0$.

Exercice 8 (Équation différentielle pour déterminer un développement en série entière)
La première est du cours. Les deux dernières peuvent aussi se faire par produit de Cauchy.

2) Les fractions, c'est Mal : $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}\,(x)$. Puis on redérive : $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

3) Idem. $(1+x)f''(x) + f'(x) = \dfrac{2}{1+x}$.

Exercice 10 (Série de fonctions)

1) Intégration par parties.

2) Calcul : changement de variable envoyant $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$: $x \mapsto 1/x$.

3) Développement en série de fonctions via la série géométrique et théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

Exercice 12 (E3A PC 2020)
Cf rapport du jury (il y a une correction), sur ma page web. Des indications :

1) Par récurrence.

2) Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a > R_b$.

3) **a)** Rayon : D'Alembert.
L'ensemble de définition : il faut préciser que, pour $|x| < 1 = R$ la série converge, pour $|x| > 1$ la série diverge grossièrement. Il reste à étudier $x = 1$ et $x = -1$: on veut l'ensemble de définition, il faut étudier tous les x possibles.

b) Produit de Cauchy (séries entières ou séries numériques, au choix).

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve $w_n = (n+1)a_{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = f'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

4) Vérifier que $f > 0$ sur $[0,1[$ avant de diviser par f dans l'équation différentielle 3c. Puis intégrer terme à terme la série entière.

5) En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6) Vérifier que l'on est dans le domaine de convergence avant d'appliquer la formule de la question précédente.

Exercice 13 (Équation différentielle)
Classique, mais dans l'autre sens : on vous donne a_n, il faut trouver l'équation différentielle.

1) Remplacer. Au besoin, utiliser $A = B \iff A - B = 0$.

2) Vérifier que $a_n \neq 0$ puis D'Alembert.
Utiliser la relation de récurrence pour trouver l'équation différentielle (toujours la même idée, mais « dans l'autre sens »).

3) Il faut savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 14 (supplémentaire)
Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1) $\ln(a/b) = ..$ etc. **2)** Dériver. **3)** Décomposition en éléments simples. **4)** Idem ou $= \dfrac{1-x}{1-x^3}$.

Exercice 15
Penser au lemme d'Abel : soit $0 < r < R$, $(a_n r^n)$ bornée donc $\left|\dfrac{a_n r^n}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n\right| \leqslant M\dfrac{(|z|/r)^n}{n!}$.
Et le terme de droite converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (série exponentielle).

Exercice 16 (Probabilités) **1)** Fait en cours.

2) Comme $1 \in]-R,R[= \mathbb{R}$, on a $E(X) = G'_X(1)$ et $G''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$ d'où on déduit, après quelques calculs, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots$.

Exercice 17 (Probabilités)
Fait en cours, sauf la dernière question (uniquement à l'oral).

4) Posons $Z_1 = S_1$, et, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $Z_{m+1} = S_{m+1} - S_m$.
D'où, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(Z_{m+1} = k) = (X_{S_m+1} = 0) \cap \dots \cap (X_{S_m+k-1} = 0) \cap (X_{S_m+k} = 1)$.
Donc Z_m détermine le nombre d'essais depuis le $(m-1)$-ième succès jusqu'à l'obtention du m-ième succès.
Comme $S_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} Z_k$, par linéarité de l'espérance, $E(S_m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} Z_k = \dfrac{m}{p}$ (géométrique paramètre p).
D'après le lemme des coalitions, $(Z_m)_m$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, donc $V(S_m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} V(Z_k) = \dfrac{m(1-p)}{p^2}$.

Exercice 19 (Inversion – CCP PSI 2018) **1)** Produit de Cauchy et unicité du développement en série entière.

2) Lemme d'Abel.

3) Unicité : $\alpha_0 = 1$ donc la seconde équation s'écrit $\beta_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_{n-k}$. Ainsi, (β_k) est une suite récurrente, donc bien définie.
Majoration : récurrence forte (enfin une récurrence forte !), avec une série géométrique.

4) Par théorème de majoration des séries entières, $R_\beta > r/(M+1)$.

5) Considérer $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{f(0)} f(x)$: oui.

Exercice 21 (Composée et produits)
Pas de série génératrice, mais il nous faut le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^k}$.

1) $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Avec le système complet d'évènements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la formule des probabilités totales s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X_1 + \cdots + X_n = k)$$

Or $X_1 + \cdots + X_n$ est une somme de variables aléatoires discrètes indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$. Donc $X_1 + \ldots X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$ et pour $k > 0$,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Puis calculs, où l'on trouve du $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \Big((1-p)^2\Big)^n$.

2) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Par indépendance, $E(Y) = E(U)E(V) = 1$.
Loi : regarder les événements. $(Y = 0) = (U = 0)$, et pour $k > 0$, $(Y = k) = (U = 1, V = k)$.
D'où $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \lambda$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \lambda^2 (1-\lambda)^{k-1}$ pour $k > 0$.

3) On trouve $\lambda = \dfrac{1}{2-p}$.

Exercice 22 (Deux dés)
Fait en cours.