Exercices : Séries entières

Exercice 1 (Rayons de convergence)

1) Déterminer en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ la nature de chacune des séries de terme général u_n suivantes. On laissera de coté le comportement « au bord » des ensembles.

a) $u_n = x^n$ **b)** $u_n = nx^{n-1}$ **c)** $u_n = \dfrac{x^{2n}}{n^2 3^n}$ **d)** $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ **e)** $u_n = \dfrac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$

2) Mêmes questions pour $z \in \mathbb{C}$. On ne s'intéressera qu'à la convergence absolue.

Exercice 2 (Rayons de convergence)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum (3n+1) z^{3n}$, **2)** $\sum \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} z^n$, $a > 0$ **3)** $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$, **4)** $\sum \dfrac{n^2}{3^n+n} z^n$,

5) $\sum \dfrac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^n$, **6)** $\sum \dfrac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$, **7)** $\sum n! z^n$ **8)** $\sum \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$

Exercice 3 (Rayons de convergence)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum d_n z^n$, où d_n est la n-ième décimale de π.

2) $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

3) $\sum \sin(n) z^n$. Indication : *Montrer que* $\sin n$ *ne tends pas vers* 0 *par l'absurde, en utilisant* $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n$ *et* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exercice 4 (Calculs de sommes)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, et exprimer leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$, **2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ **4)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ **5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n! \sin^n a} x^n$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n! \sin^n a} x^n$, avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$

Déterminer la somme sur l'intervalle $]-R, R[$, donc pour une variable x réelle, des séries correspondant au **5), 6)** puis **1)** de l'exercice 2, et 3) de l'exercice 3.

Exercice 5 (Développements en série entière)
Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0, et calculer leur développement.

1) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, **2)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, **3)** $\cos^2 x \sin x$, **4)** $e^x \cos(x)$, **5)** $\dfrac{1}{(1-t)^3}$,

6) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{ch}\,(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$, **7)** $\dfrac{e^x}{1-x}$.

Exercice 6 (Équation différentielle : méthode de Frobenius)
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 0$$

1) Soit $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.

2) Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p} .

3) On admet que l'on peut montrer, de même, que pour tout $p \geqslant 0$, $a_{2p+1} \neq 0$. Déterminer R.

4) Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, a_{2p+1}.

Exercice 7 (Équations différentielles)
Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $y' - x^2y = 0$, $y(0) = 1$; **2)** $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; **3)** $xy' - y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Exercice 8 (Équation différentielle pour déterminer un développement en série entière)
À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

1) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2)** $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ **3)** $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 9 (Série de fonctions)
Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2) Calculer la somme de la série dérivée, en déduire une expression de la somme f sur un intervalle à préciser.

3) Étudier la convergence de la série sur $[-1, 1]$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 10 (Série de fonctions)

1) Calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$ existe, puis que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $I = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 11 (Série de fonctions)
Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$.

1) Développer $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ en série entière.

2) En déduire le développement de la primitive F de f s'annulant en 0, sur un intervalle que l'on précisera.

3) Méthode 1 : Montrer que la série de fonctions précédente, de limite F, converge uniformément sur $[-1, 1]$. Conclure.

4) Méthode 2 : Montrer que la série numérique $F(1)$ converge. Conclure en citant précisément les hypothèses du théorème utilisé.

Exercice 12 (E3A PC 2020)
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3) **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

b) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

c) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4) Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5) En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13 (Équation différentielle)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R,R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

3) En déduire f.

Exercice 14 (supplémentaire)
Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ **2)** $\mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ **3)** $\frac{2}{x^2-4x+3}$ **4)** $\frac{1}{x^2+x+1}$

Exercice 15
Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que le rayon R de convergence de la série entière associée soit strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

Exercice 16 (Probabilités)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = 2n+1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\ x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1) Calculer sa fonction génératrice à l'aide de fonctions usuelles.

2) En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 17 (Probabilités)
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Leftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

1) Rappeler le développement en série entière de $(1 + x)^\alpha$ (on précisera le rayon).
En déduire, en explicitant (avec des « … ») le coefficient du binôme, que

$$\forall t \in]-1, 1[\qquad \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n$$

2) Reconnaître la loi et donner la fonction génératrice de S_1.

3) Déterminer la loi de S_m. En déduire sa fonction génératrice, puis son espérance.

4) À l'aide d'une somme de variables aléatoires discrètes de même loi, égales en loi à S_m, retrouver $E(S_m)$ et déterminer $V(S_m)$.

Exercice 18 (Exponentielle)
Nous allons montrer que l'exponentielle transforme la somme en produit : c'est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

2) Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, rappeler quelle est la loi de $Z = X + Y$ (déjà calculé lors d'un exercice de probabilité).
À l'aide des fonctions génératrices, retrouvez le résultat de la question 1.

Exercice 19 (Inversion – CCP PSI 2018)
Soit $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $f(0) = \alpha_0 = 1$.
L'objectif de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $g(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

1) Montrer que si $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta_0 & = & 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

2) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}$$

3) Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence et exprimer β_{n+1} en fonction des β_k pour $k \geqslant n$.

4) Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

5) Désormais on suppose seulement $f(0) \neq 0$. Est-ce que $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est développable en série entière ?

Exercice 20 (Loi binomiale négative)
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_m$ une suite de variable aléatoire discrète indépendantes identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi) de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Loi de $S = X_1 + \cdots + X_m$.

Exercice 21 (Composée et produits)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire discrète indépendantes identiquement distribuées, de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Soit $N \sim \mathscr{G}(p)$.

1) Donner la loi de $S = X_1 + \cdots + X_N$.

2) Soit $\lambda \in]0, 1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.
Espérance de Y, puis loi de Y.

3) En déduire que S a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

Exercice 22 (Deux dés)
On considère les variables aléatoires X et Y donnant le résultats du lancer de deux dés à 6 faces. Peut-on piper ces dés de telle façon que $X + Y$ suive une loi uniforme ?
C'est-à-dire « Peut-on trouver $X \perp\!\!\!\perp Y$ de lois sur $[\![1, 6]\!]$ telles que $X + Y$ suive une loi uniforme ? »