Corrections : Probabilités

Indications et corrections succinctes des exercices non abordés.

Exercice 5

3) Par sous-additivité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m \Longrightarrow P(B_n) \leqslant \sum_{m \geqslant n} P(A_m)$$

Or $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge : le reste tend vers 0, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{m \geqslant n} P(A_m) = 0$. Donc, par majoration,

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$$

En conclusion, d'après la question 2,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$$

Exercice 8

L'idée de ce type d'exercice est toujours de bien décrire la situation. Introduire, pour chaque étape, une variable aléatoire qui décrit le résultat du tirage est souvent une bonne idée. Ou une variable aléatoire qui décrit le contenu de l'urne à une étape fixée. Ce qui permet, ensuite, de décrire les évènements demandé par l'énoncer comme intersection d'évènements, puis d'écrire des formules de probabilités composées – et l'exercice est terminé.

Notons X_i le résultat du i-ème tirage. $X_i(\Omega) = \{B, N\}$ (on peut aussi prendre $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $(X_i = 1)$: « la boule tirée est blanche », et X_i suit alors une loi de Bernoulli).

- $N_k = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = N)$: on a effectué $(k-1)$ tirages d'une boule noire, et le k-ième tirage apporte encore une boule noire. Il y a toujours une seule boule blanche, et, au k-ième tirage, il y a $n + k - 1$ boules dans l'urne : au premier $(k = 1)$ tirage, il y en a n, et on rajoute une boule à chaque tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_k = N) = 1 - \dfrac{1}{n+k-1}$, et, par indépendance (ou avec des probabilités conditionnelles, selon la modélisation),

$$\mathbb{P}(N_k) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{n+i-2}{n+i-1}\right) = \frac{n-1}{n+k-1}$$

  Le produit est télescopique – ce que l'on voit en l'écrivant avec des pointillés.

- $B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = N)\right) \cap (X_k = B)$: on a effectué $(k-1)$ tirages noirs, et le k-ième tirage apporte une boule blanche. Seul le dernier tirage change :

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{n+k-1} \times \frac{n-1}{n+k-2}$$

- $\bigcup_{h \leqslant k} B_h$: il existe $h \leqslant k$ tel que B_k soit réalisé, c'est-à-dire le jeu se termine au plus tard au k-ième lancer. Comme l'union est disjointe,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \leqslant k} B_h\right) = \sum_{h=1}^{k} \mathbb{P}(B_h) = \sum_{h=1}^{k} \frac{n-1}{(n+h-1)(n+h-2)}$$

  En passant par l'évènement contraire, celui-ci est « le jeu ne se termine pas avant le k-ième lancer », c'est-à-dire N_k :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \leqslant k} B_h\right) = 1 - \frac{n-1}{n+k-1} = \frac{k}{n+k-1}$$

- $\overline{B_k \cup N_k}$: Soit en décrivant l'évènement, soit en passant par les X_i, on constate que $B_k \cup N_k = N_{k-1}$, donc
$$\mathbb{P}\left(\overline{B_k \cup N_k}\right) = \frac{k-1}{n+k-2}$$
- $\bigcup_{h \geqslant 1} N_h$: La famille $\left(\bigcup_{h=1}^{k} N_h\right)_k$ étant croissante pour l'inclusion, par continuité croissante,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \geqslant 1} N_h\right) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{h=1}^{k} N_h\right)$$
Or $N_k \subset N_1$ pour tout k : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \geqslant 1} N_h\right) = \mathbb{P}(N_1) = \dfrac{n-1}{n}$.
- $\bigcup_{h \geqslant 1} B_h$: Comme $\left(\bigcup_{h=1}^{k} B_h\right)_k$ est croissante pour l'inclusion, par continuité croissante,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \geqslant 1} B_h\right) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{h=1}^{k} B_h\right)$$
Conclure avec les calculs précédents (on trouve 1).
- $\bigcap_{h \geqslant 1} N_h$: conclure par continuité décroissante, ou via l'événement contraire.

Exercice 9
On montre l'inégalité en posant $f(x) = 1 + x - e^x$ puis étude de fonction (dériver).
D'après le cours, les $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. Majorer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} \bar{A}_n\right)$, puis conclure par continuité décroissante. On effectuera les calculs dans $[0, +\infty]$ (en particulier celui de $\sum \mathbb{P}(A_n)$).

Exercice 10 (Loi hypergéométrique)

1) C'est un exercice de dénombrement. Faire un schéma.
Tout d'abord, $X(\Omega)$: $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$, avec $b = \min(p, b)$. La valeur de a s'obtient en regardant les boules noires tirées : il y en a au plus $\min(p, n-b)$, ce qui donne un nombre de blanches tirées minoré par $a = \max(0, p - (n-b))$
Soit $k \in X(\Omega)$, $(X = k)$ consiste à tirer un ensemble de k boules parmi b boules blanches et, indépendamment, tirer $p-k$ boules parmi $n-b$ boules noires. L'univers Ω est l'ensemble des tirages possibles de p boules parmi n. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{n-b}{p-k}}{\binom{n}{p}}$$

2) $b = 1000$, $p = 1000$ et $k = 100$.

Exercice 14
Prendre son temps : commencer par n petit : $n = 1$, $n = 2$, $n = 3 \ldots$, jusqu'à être certain de la formule.

1) $A_1 = (X_1 \in \{1, 2\})$
$B_2 = (X_1 \notin \{1, 2\}) \cap (X_2 \in \{3, 4, 5\})$
$A_3 = (X_1 \notin \{1, 2\}) \cap (X_2 \notin \{3, 4, 5\}) \cap (X_3 \in \{1, 2\})$
$B_4 = (X_1 \notin \{1, 2\}) \cap (X_2 \notin \{3, 4, 5\}) \cap (X_3 \notin \{1, 2\}) \cap (X_4 \in \{3, 4, 5\})$
$A_5 = (X_1 \notin \{1, 2\}) \cap (X_2 \notin \{3, 4, 5\}) \cap (X_3 \notin \{1, 2\}) \cap (X_4 \notin \{3, 4, 5\}) \cap (X_5 \in \{1, 2\})$
On trouve, après calculs, $\mathbb{P}(A_{2n-1}) = \mathbb{P}(B_{2n}) = \dfrac{1}{3^n}$.

2) Union disjointe, série géométrique (commencer à 0 !) : on trouve $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B) = 1/2$. Et donc, via l'événement contraire $\bar{H} = G_A \cup G_B$, $\mathbb{P}(H) = 0$.

Exercice 20 (Urnes de Polya – cas particulier)
Regarder le DL5 de 2020, pour la correction détaillée.
Les idées sont toujours : $X(\Omega)$; commencer par n petit, le temps de bien comprendre la situation ; utiliser la formule des probabilités totales, avec $(X = k)$ comme système complet d'évènements.

1) $n + 1$.

3) Pour calculer $(X_n = k)$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = i)$. Les seuls évènements éventuellement non vide sont $(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k)$ et $(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k - 1)$.

Pour le cas général, on pourra consulter le sujet CCINP 2021 ;-)