Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

- 1) Montrer que (u_n) est décroissante. Est-elle convergente ?
- 2) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer un équivalent de u_n .

Nous verrons, au chapitre « Suites et séries de fonctions », des techniques d'étude de la limite pour cette catégorie de suites.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} : I_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) \, dt$

- 1) Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- 2) Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$.
- 3) Soient x et y deux réels. Établir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t|f(t)| \, dt$.
- 4) En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4

Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz*.

(bonus : peut-on avoir égalité?)

Exercice 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

- 1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- 2) Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x) \exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h .
- 3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 6

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.

Déterminer le domaine de définition, la dérivabilité, la dérivée, les variations puis la limite en $+\infty$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_1^x e^{-(xt)^2} \frac{dt}{t}$. Montrer que f est dérivable et calculer f' .

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t^3} \, dt$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{(\ln t)^2} \, dt$

Indication : *Penser aux DL*.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

- 1) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t) \, dt = K$. Montrer que f est T -périodique.
- 2) Montrer la réciproque.

- 3) On suppose que f est T -périodique et d'intégrale nulle sur une période. Montrer que F , une primitive de f , est T -périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique ?

Exercice 10 (Théorème de Riemann-Lebesgue)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- 1) Montrer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ist} dt = 0$.
- 2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, T -périodique, d'intégrale nulle sur une période. Montrer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(st) dt = 0$.
- 3) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Dédurre de la question précédente que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(st) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable puis calculer la dérivée.

Exercice 12

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout x , et $f(a) = 0$. On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f^3(t) dt - \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2$$

- 1) Déterminer les variations de F .
- 2) Montrer que $\int_a^b f^3(t) dt \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2$.

Exercice 13 (*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

- 1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$ (Indication : faire un dessin).
- 2) En déduire que $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 14 (Primitives)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera :

- 1) $\frac{x^3}{x^4 - 1}$ 2) $\frac{1}{t(\ln t)^2}$ 3) $\cos^3 x \sin^2 x$ 4) $\frac{\cos x}{\sin(x) + 1}$
- 5) $(x^2 + x + 1) \cos(2x)$ 6) $(2x + 3) \cos xe^{-x}$ 7) $\frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}$ 8) $(x^2 + 1) \ln^2 x$

Exercice 15 (Cours)

Nature des intégrales :

- 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; 2) $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt$ où $\beta \in \mathbb{R}$ 3) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; 4) $\int_0^1 \ln t dt$

Exercice 16 (un exemple)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $\left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n} \right]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) où la courbe $\mathcal{C}_f$ forme un triangle de hauteur 1.

- 1) a) Faire un dessin du graphe de f entre 0 et 3, puis au voisinage de $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Est-ce que f a une limite en $+\infty$?

Rappel : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors pour toute suite (x_n) de limite a , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

- 2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt$.
- b) Soit $X \in \mathbb{R}$. En posant $n = \lfloor X \rfloor$, encadrer $\int_0^X f(t) dt$.
- c) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- 3) Construire sur ce modèle une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Exercice 17

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t^3 + 5t^2 + 1}{2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1} dt \quad 2) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$$

Exercice 18 (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

- 1) On suppose $\alpha \neq 1$. Étudier la nature de l'intégrale.
- 2) Étudier le cas $\alpha = 1$. Conclure.
- 3) Déduire du cas $\alpha = 1$ la nature de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de β .
- 4) Déduire de l'étude précédente la nature de $\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 19

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t) + e^t} dt \quad 2) \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}} dt \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t} dt \quad 4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} dt$$

$$5) \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt} dt, \text{ où } z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 20

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt \quad 2) \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt \quad 3) \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})} \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}} dt \quad 7) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}} dt \quad 8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

Exercice 21

Étudier la convergence des intégrales et l'intégrabilité des fonctions suivantes :

$$1) \int_\pi^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{i(x^2)} dx \quad 2) \int_0^{+\infty} t \sin(t^4) dt$$

Indication : Pour le 1), calculer une primitive.

Exercice 22

On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.
- 2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Indication : Prouver puis utiliser l'inégalité suivante : $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

3) En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$$

déterminer le signe de I .

Exercice 23

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 24

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose de plus que $f \sim_b g$.

1) On suppose que $\int_a^b g(t) dt$ converge. Que peut-on dire de $\int_a^b f(t) dt$? Montrer que

$$\int_x^b f(t) dt \sim_b \int_x^b g(t) dt$$

Attention! $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} g$ sont des nombres, des réels bien concrets. Ils sont a priori différents. Ils peuvent être égaux, plus grand, plus petit l'un que l'autre ... et c'est tout.

2) On suppose que $\int_a^b g(t) dt$ diverge. Que peut-on dire de $\int_a^b f(t) dt$? Montrer que

$$\int_a^x f(t) dt \sim_b \int_a^x g(t) dt$$

Indication : Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_1 tel que pour tout $x \geq x_1$,

$$\left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_a^x g(t) dt$$

Exercice 25 (Restes et sommes partielles)

On cherche à obtenir des équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas des séries de Riemann.

On s'aidera d'une comparaison série / intégrale pour obtenir un encadrement.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.