Exercices : Intégration

Exercice 1 (oral)
Pour tout entier n on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante. Est-elle convergente ?

2) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer un équivalent de u_n.

Nous verrons, au chapitre « Suites et séries de fonctions », des techniques d'étude de la limite pour cette catégorie de suites.

Exercice 2
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3 (Formule de la moyenne)
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(c) \int_a^b g(t) \, dt$$

Exercice 4 (*)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $h : I \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x) \exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h.

3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 5
On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}\,(t)}{t} \, dt$.
Déterminer le domaine de définition, prolonger en 0, la dérivabilité, la dérivée, les variations puis la limite en $+\infty$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_1^x e^{-(xt)^2} \frac{dt}{t}$. Montrer que f est dérivable et calculer f'.

Exercice 7
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t^3} \, dt$ **2)** $\lim\limits_{x \to 1} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{(\ln t)^2} \, dt$ **3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} \, dt$

Indication : *Penser aux DL.*

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

1) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+T} f(t) \, dt = K$. Montrer que f est T-périodique.

2) Montrer la réciproque.

3) On suppose que f est T-périodique et d'intégrale nulle sur une période. Montrer que F, une primitive de f, est T-périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique ?

Exercice 9 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ist}\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, T-périodique, d'intégrale nulle sur une période.

Montrer que $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = 0$.

3) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \int_a^{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} f(u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable puis calculer la dérivée.

Exercice 11

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(x) \in [0,1]$ pour tout x, et $f(a) = 0$. On définie la fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f^3(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

1) Déterminer les variations de F.

2) Monter que $\int_a^b f^3(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

Exercice 12 (*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$ (Indication : *faire un dessin*).

2) En déduire que $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 13 (Primitives)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera :

1) $\dfrac{1}{ix-1}$ **2)** $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$ **3)** $\dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ **4)** $\dfrac{\cos x}{\sin(x)+1}$

5) $\cos^2 x \sin^4 x$ **6)** x^2e^{-3x} **7)** $(x^2+x+1)\cos(2x)$ **8)** $x \operatorname{Arctan} x$

Exercice 14 (Cours)

Nature des intégrales :

1) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **2)** $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$ **3)** $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **4)** $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 (un exemple)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $\left[n - \dfrac{1}{2^n}, n + \dfrac{1}{2^n}\right]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) où la courbe $\mathscr{C}_f$ forme un triangle de hauteur 1.

1) **a)** Faire un dessin du graphe de f entre 0 et 3, puis au voisinage de $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que f a une limite en $+\infty$?

Rappel : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors pour toute suite (x_n) de limite a, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

2) **a)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $X \in \mathbb{R}$. En posant $n = \lfloor X \rfloor$, encadrer $\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Construire sur ce modèle une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 16
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 17 (Intégrales de Bertrand)
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1) On suppose $\alpha \neq 1$. Étudier la nature de l'intégrale.

2) Étudier le cas $\alpha = 1$. Conclure.

3) Déduire du cas $\alpha = 1$ la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de β.

4) Déduire de l'étude précédente la nature de $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 18
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$ **6)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 20
Étudier la convergence des intégrales et l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{i(x^2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$

<u>Indication</u> : *Pour le 1), calculer une primitive.*

Exercice 21
On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.

2) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. <u>Indication</u> : *Prouver* $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$.

3) En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

Exercice 22
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0)=0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 23
Soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose de plus que $f \sim_b g$.

1) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention ! $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g$ sont des nombres, des réels bien concrets. Ils sont a priori différents. Il peuvent être égaux, plus grand, plus petit l'un que l'autre ... et c'est tout.

2) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Indication</u> : *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_1 tel que pour tout $x \geqslant x_1$,*

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 (Restes et sommes partielles)
On cherche à obtenir des équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas des séries de Riemann.
On s'aidera d'une comparaison série / intégrale pour obtenir un encadrement.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.