1 Normes

Exercice 2 (Normes)
Pour la structure d'espace vectoriel, $\mathbb{K}^{n^2}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont identiques – peu importe comment on écrit les coefficients sur la feuille de papier.
Avec $I = [\![1, n]\!]^2$ et $A = (a_{i,j}) \in E$,

$$\|A\|_1 = \sum_{(i,j)\in I} |a_{i,j}| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in I} |a_{i,j}|^2} \qquad \|A\|_\infty = \sup_{(i,j)\in I} |a_{i,j}|$$

Exercice 4 (Matrices)
$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|A\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1)
- Soit $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\|\lambda A\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(|\lambda| \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

  Or, d'après le cours, si $k = |\lambda| \in \mathbb{R}_+$ et $\mathscr{E} = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \mid i \in [\![1, n]\!] \right\} \subset \mathbb{R}$ non vide,

  $$\sup(k\mathscr{E}) = k \sup(\mathscr{E})$$

  Donc, ici,

  $$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

- Soit $A, B \in E$.

On peut aussi poser $\alpha_i = (a_{i,j})_j \in \mathbb{K}^n$ et utiliser les propriétés de la norme 1 puis de la norme infinie de $x = (\|\alpha_1\|_1, \dots, \|\alpha_n\|_1)$ pour prouver les propriétés précédentes.

2) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

Exercice 6
Pour la norme : vérifier que la norme est bien définie (suites à support fini).
Puis vérifier les 3 propriétés, sur le modèle de la norme 1. On vérifie que $\dfrac{1}{n+1}$ et $(n+1)$ sont non nuls *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, sinon la séparation ($N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$) n'est pas vérifiée.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\delta_{kn}}{k+1} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n = 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non borné.

Ainsi, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n$ n'existe pas [1].

3) La famille $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^d, X^{d+1} - P, \dots, X^n - P, \dots)$ est de degré échelonnée dans $\mathbb{R}[X]$. Donc elle est libre.
De plus, les $n + 1$ premiers vecteurs sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n + 1$, donc forment une base de cet espace. En particulier, ils engendrent $\mathbb{R}_n[X]$. Donc Vect $(\mathscr{B}) = \mathbb{R}[X]$, par double inclusion.
Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Notons $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour tout $Q = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k e_k$, on définit

$$\|Q\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n+1}$$

1. Pas de notion simple de limite infinie dans un espace vectoriel normé.

Comme (e_i) est de degrés échelonnés, (a_k) est à support fini ($a_k = 0$ pour $k > \deg Q$) et $\|Q\|$ est bien définie.

La norme $\|.\|$ est la même que la première norme de la question 1, à un changement de base près, donc c'est bien une norme.

De plus, pour tout $n > d = \deg P$, $X^n - P = e_n$ donc

$$\|X^n - P\| = \|e_n\| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n - P = 0$ puis

$$\boxed{\text{La suite } (X^n)_n \text{ converge vers } P \text{ pour la norme } \|.\|}$$

2 Parties : ouverts, fermés, densité, convexité

Exercice 7 (Espace de fonctions)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de $\|.\|_\infty$.

1) $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\} = \bigcap\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé : cf TD.

Preuve directe : Soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in E$ pour $\|.\|_\infty$, c'est-à-dire uniformément. La convergence uniforme entraîne la convergence simple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geqslant 0$. Donc $f \in E$.

Donc, par caractérisation séquentielle, F est fermé.

2) Supposons que G est ouvert. *Notations du cours : pour tout $x \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset G$. L'inclusion s'écrit : pour tout $y \in B(x,r)$, $y \in G$.*
Avec les notations de l'exercice : pour tout $f \in G$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $g \in B(x,r)$, $g \in G$.
Et $g \in B(x,r)$ signifie $\|g - f\|_\infty < r$. On peut aussi poser $g = f + h$.

Soit $f = \exp \in G$. Soit $r > 0$ et $h(x) = -r/2$ la fonction constante. Alors $\|h\|_\infty = r/2 < r$ donc

$$g = f + h \in B(f,r)$$

Or $g(x) = e^x - r/2 < 0$ pour x assez grand (précisément $x > \ln(r/2)$), donc $g \notin G$, et $B(f,r)$ n'est pas incluse dans G. *Donc $f = \exp$ est à la frontière de G.*

Ainsi, $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0\}$ n'est pas ouvert.

3) Il faut vérifier que $\|.\|_\varphi$ est bien définie (car $f\varphi$ bornée), et les 3 hypothèses. Seule la séparation donne une condition nécessaire et suffisante.

On note $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points où s'annule φ ($A = \varphi^{-1}(0)$). Si $\mathring{A}$ est l'intérieur de A, la condition nécessaire et suffisante est

$$\boxed{\|.\|_\varphi \text{ est une norme sur } E \text{ si et seulement si } \mathring{A} = \emptyset}$$

On vérifie que $\|.\|_\varphi$ vérifie toujours les hypothèses 2 et 3 définissant une norme. Puis :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par contraposition. Si $\mathring{A} \neq \emptyset$, on considère $]a,b[\subset A$ une boule ouverte incluse dans A. Soit f une fonction non nulle sur $]a,b[$, et nulle sur le reste de $\mathbb{R}$ (par exemple affine par morceaux).
Alors $\|f\|_\varphi = 0$ alors que $f \neq 0$, et $\|.\|_\varphi$ n'est pas une norme.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\mathring{A} = \emptyset$, tout point $x \in A$ s'écrit comme $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ avec $x_n \in \mathbb{R}\backslash A$.
Soit $f \in E$ telle que $\|f\|_\varphi = 0$: alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash A$. Et la continuité de f nous donne $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ en tout $x \in A$, donc $f = 0$. D'où $\|.\|_\varphi$ est une norme.

Montrons que $\|.\|_\varphi$ est une norme équivalente à $\|.\|_\infty$ si et seulement si $A = \emptyset$ et $1/\varphi$ bornée.

$\boxed{\leqslant}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty$. Ainsi, $\|f\|_\varphi \leqslant C\|f\|_\infty$.

$\boxed{\geqslant}$ Supposons $A = \emptyset$ et $1/\varphi$ non bornée. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1/\varphi(x_n)| > 2n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\varphi(x_n)| < 1/(2n)$$

Comme $|\varphi|$ est continue, il existe $r_n > 0$ tels que $\forall t \in I_n =]x_n - r_n, x_n + r_n[$, $|\varphi(x_n)| < 1/n$.

Soit $f_n \in E$ une fonction continue nulle hors de I_n, et telle que $f_n(x_n) = 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1$ (par exemple affine par morceaux).

Alors $\|f_n\|_\varphi \leqslant 1/n$ donc (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|.\|_\varphi$.

Mais $\|f_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0 : (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour $\|.\|_\infty$.

Ainsi, si $1/\varphi$ est non bornée, les normes ne sont pas équivalentes. Si $A \neq \emptyset$, on prend une suite (x_n) sur le même modèle qui tend vers $\ell \in A$.

Réciproquement, si $A = \emptyset$ et $1/\varphi$ est bornée, un raisonnement identique à ci-dessus nous donne $\|f\|_\infty \leqslant \|1/\varphi\|_\infty \|f\|_\varphi$.

Exercice 8 (Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(1) = 1\}$.

1) La convergence uniforme (pour $\|.\|_\infty$) entraîne la convergence simple : si (f_n) tends vers f, alors pour tout $x \in [0,1]$ (en particulier pour $x = 1$), $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$.

2) Considérons $f_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (f_n) tend vers la fonction nulle $f = 0$. Or $f_n(1) = 1$, et $f(0) = 0 \neq 1$.

En particulier, la convergence pour $\|.\|_1$ n'entraîne pas la convergence simple.

De plus, (f_n) n'a pas de limite pour $\|.\|_\infty$ (sa limite serait la même que celle de la convergence simple, qui n'est pas continue).

Donc (f_n) converge pour $\|.\|_1$, et diverge pour $\|.\|_\infty$: les normes ne peuvent pas être équivalentes.

Exercice 9 (Densité)
Soit $E = \ell^1(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, muni de $\|.\|_1$. et F l'ensemble des suites à support fini.

1)
- $F \subset E$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est en fait une somme finie.
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$. Soit $n_u, n_v \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_u$ et de même pour v. Alors, pour tout $n \geqslant \max(n_u, n_v)$, $\lambda u_n + v_n = 0$. Donc $\lambda u + v \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrons que $\overline{F} = E$ par double inclusion. Nous avons $\overline{F} \subset E$. Montrons que $E \subset \overline{F}$.
Soit $u \in E$. Construisons $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = (u_0, \dots, u_n, 0, \dots)$, c'est-à-dire $x_{n,k} = u_k$ si $k \leqslant n$, $x_{n,k} = 0$ si $k > n$.
Alors $[u - x_n]_k = 0$ si $k \leqslant n$, et $[u - x_n]_k = u_k$ si $k > n$.

Donc $\|u - x_n\|_1 = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$ est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum |u_n|$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - x_n\|_1 = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = u$. Donc $u \in \overline{F}$.

Conclusion : $\overline{F} = E$.

Exercice 11 (Quelques résultats généraux)
Soit E muni de $\|.\|$ un espace vectoriel normé.

1) Supposons que $\mathring{F} \neq \emptyset$. Montrons que $F = E$ par double inclusion : $F \subset E$, il reste à montrer $E \subset F$.
Soit $a \in \mathring{F}$, comme $\mathring{F}$ est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathring{F} \subset F$.

L'idée est de déplacer cette boule en 0, puis, comme le sous-espace vectoriel est stable par produit par λ, montrer que tout élément de E est dans F.

Comme $a \in F$, $B(0, r) = -a + B(a, r) = \{-a + x \mid \|x - a\| < r\} \subset F$. Comme F est stable par produit par un scalaire λ, en multipliant les éléments de $B(0, r)$ par $1/r$ on montre que $B(0, 1) \subset F$.

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = \frac{1}{2} \times \frac{x}{\|x\|} \in B(0,1) \subset F$. Donc, avec $\lambda = 2\|x\|$, $\lambda y = x \in F$.
Ainsi, $E \subset F$. En conclusion, $F = E$.

2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $x \in F$. Alors $d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $d(x,F) = 0$. Alors, par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ tel que $\|x - y_n\| \leqslant 1/n$. Par majoration, la suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ converge donc vers x.
Ainsi, $x \in \overline{F} = F$ car F fermé.

En conclusion, $x \in F \iff d(x,F) = 0$.

Montrons que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

Soit $A \subset E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,A)$. La fonction f est 1-lipschitzienne : soit $x_1, x_2 \in E^2$,

$$\forall y \in A, \qquad d(x_1, A) \leqslant \|x_1 - x_2 + x_2 - y\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\|$$

Donc, en passant à la borne inférieure pour $y \in A$, $d(x_1,A) \leqslant \|x_1 - x_2\| + d(x_2, A)$.
Ainsi, $|d(x_1,A) - d(x_2,A)| \leqslant \|x_1 - x_2\|$, la valeur absolue étant obtenue par symétrie des rôles joués par x_1 et x_2. Par conséquent, f est lipschitzienne, donc continue sur E.
Soit $\Omega \subset E$ un ouvert. D'après ci-dessus, $F = E \backslash \Omega = \{x \in E \mid d(x,F) = 0\}$ car F fermé, donc

$$\Omega = \{x \in E \mid d(x,F) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$$

Posons $F_n = \{x \in E \mid d(x,F) \geqslant 1/n\} = f^{-1}([1/n, +\infty[)$, qui est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
De plus, $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \Omega$ par double inclusion, donc Ω est réunion dénombrable de fermés.

3) Fait en TD.

Exercice 12 (Convexité)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont convexes.

1) Pas convexe : si $r > 0$, $0 \notin S(0,r)$, mais pourtant $1/2(x + (-x)) \in S(0,1)$ par convexité : c'est absurde. (Chercher avec un dessin dans $\mathbb{R}^2$, y compris pour $\|.\|_\infty$)

2) TD.

3) Utiliser la caractérisation la plus « compatible » avec $tA + (1-t)B$.

4) Rien : écrire la définition, traduire dans les notations de l'exercice, traduire « bistochastique »... et c'est terminé en quelques lignes.

5) $\bar{A}$: TD. Pour $\mathring{A}$, faire un dessin, caractérisation d'un ouvert, et prendre $r = \min(r_a, r_b)$.

3 Fonctions continues et applications

Exercice 14 (Matrice stochastiques)

1) Soit $M = (a_{ij})$ et $X = (x_i)$, alors $MX = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\|X\|_\infty = \|X\|_\infty$$

Bien utiliser $a_{ij} \geqslant 0$.

2) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ et X un vecteur propre associé : $MX = \lambda X$. L'inégalité ci-dessus donne $|\lambda| \leqslant 1$, car $\|X\|_\infty > 0$.
De plus, avec X le vecteur colonne n'ayant que des 1, $MX = X$ donc $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Ainsi, $\rho(M) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda| = 1$.

3) Se placer dans une base de diagonalisation de D et étudier la forme de N dans cette base, sachant que 1 est une valeur propre simple.

On pourra faire le lien avec l'exercice de probabilité sur les chaînes de Markov.

Exercice 18 (Continuité)
Début : TD.

3) Le TBA donne l'existence du max et du min. $f \geqslant 0$ et $f(0,0) = 0$ donc le minimum est 0.
Pour le max : par symétrie des rôles joués par x et y, $\max\limits_{[0,1]^2} f = \max\limits_{T} f$ où $T = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \leqslant y\}$.
La recherche des points critiques donne $(0,1) \notin \mathring{T}$. Donc le maximum est atteint forcément au bord : trois segments à étudier. $f(0,y) = f(x,1) = 0$, donc il reste à étudier $g(x) = f(x,x) = x(1-x)$, maximum atteint en $x = 1/2$ de valeur $1/4$.

Exercice 19 (Suites)
1) Soit x et y deux points fixes de f. Alors $N(x-y) = N(f(x) - f(y)) \leq kN(x-y)$. Si $N(x-y) > 0$, alors $k < 1$ donne $kN(x-y) < N(x-y)$, ce qui est impossible. Donc $N(x-y) = 0$, donc $x = y$, d'où l'unicité de (l'éventuel) point fixe de f.
2a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $N(u_{n+1} - \ell) = N(f(u_n) - f(\ell)) \leq kN(u_n - y)$. On fait donc une récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 0$, $N(u_0 - \ell) \leq k^0 N(u_0 - \ell)$ est vrai car $k^0 = 1$.
Hérédité : Si $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$, alors $N(u_{n+1} - \ell) \leq kN(u_n - y) \leq k^{n+1} N(u_0 - \ell)$. D'où l'hérédité.
2b) $0 \leq k < 1$ donne $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème d'encadrement (car $0 \leq N(u_n - \ell)$), on a $N(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 20 (Continuité)
$x^2 + y^2 \leqslant 2x^2 + y^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$ donc on peut minorer ou majorer par une fonction qui se simplifie bien.
Ici, on est dans le cas où f n'est pas continue, il suffit de regarder $f(x,0)$ et $f(x,x)$, sans même utiliser une inégalité.

Exercice 21 (Continuité)
Respectivement : 0, polaire ; non, (x,x) et $(x,0)$; cours.

Exercice 22 (Fermés bornés)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie

1) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|u(x)\|$. Rappel : $S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.
Nous cherchons donc à montrer que $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x \in S(0,1)} f(x) \in \mathbb{R}$ et est atteinte.
L'application u est linéaire sur E de dimension finie, donc continue. Et, comme la norme est continue, par composition f est continue.
De plus, $A = S(0,1)$ est fermé, borné, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes sur A. Pour le maximum, cela s'écrit : il existe $x_0 \in S(0,1)$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$.
C'est-à-dire $\|u(x_0)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

2) L'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ est non vide, donc la borne inférieure $d(x,F)$ est finie.
Soit $y_0 \in F$. Par définition de la borne inférieure, $r = \|x - y_0\| \geqslant d(x,F)$.
Soit $K = F \cap \overline{B(x,r)}$.
Si $y \in F$ et $y \notin K$, alors $\|x - y\| > r \geqslant d(x,F)$. Donc $\inf\limits_{y \in F} \|x - y\| = \inf\limits_{y \in K} \|x - y\|$.
De plus, K est un fermé comme intersection de fermé (F sous-espace vectoriel en dimension finie) et borné car inclus dans $\overline{B(x,r)}$, non vide car $y_0 \in K$.
Et $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(y) = \|x - y\|$ est continue comme composée d'application continues.
Ainsi, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes : il existe $y \in K \subset F$ tel que $\|x - y\| = d(x,F)$.
Application : Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.
Soit $F_n = \{t \in [a,b] \mapsto P(t) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\} \subset E$ et $E' = \operatorname{Vect}(f, F_n)$. Alors E' est de dimension finie.
Donc on peut appliquer le résultat précédent : il existe $Q \in F_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty = \inf\limits_{P \in F_n} \|P - f\|_\infty$.

3) K fermé borné et $f : K \to \mathbb{R}$ continue : d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. Soit x_0 et $x_1 \in K$ tels que $\forall x \in K,\ f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$.
Posons $\alpha = f(x_0) > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{K},\ f(x) \geqslant \alpha$.

4 Et quelques exercices bonus pour celles et ceux arrivées jusqu'ici

Lectrice, lecteur, sache que ces exercices ne serviront pas directement pour les concours section PC, où il y a peu de topologie. C'est pur loisir.

Exercice 23
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $(P_n(u)) \in \mathscr{L}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, avec $P_n \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que sa limite est un polynôme en u, et qu'il est de degré strictement plus petit que $n = \dim E$.

Solution. Soit $F = \mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.
F est l'image de $\varphi : P \mapsto P(u)$ linéaire, donc un sous-espace vectoriel.
Comme E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E)$ aussi, et F est donc fermé.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u) \in F$, donc est un polynôme en u.
Degré : Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u)$. D'après Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$.
En effectuant la division euclidienne $A = \chi_u Q + R$, $R(u) = A(u)$ et $\deg(R) < n$. □

Exercice 24
Soit $E = \mathbb{R}^2$ normé, et $A \subset E$. Construire A tel que $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$, etc. soient aussi distincts que possible. Déterminer à quelle étape ils ne sont plus distincts. Idem pour $\overline{A}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, etc.

Solution. □