$\boxed{\text{Corrections : Euclidiens}}$

Indications et corrections succinctes des exercices non abordés.

Exercice 6 **1)** Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

- $E \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.
- $E \neq \emptyset$ car $0 \in E$.
- Soit $f, g \in E$. Montrons que $f+g \in E$, c'est-à-dire $(f+g)^2$ intégrable sur I.
  Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant (a^2+b^2)/2$. Donc pour tout $(f,g) \in E^2$,
  $$|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$$
  Or f^2 et g^2 sont intégrables sur I : par théorème de majoration, fg est intégrable sur I.
  Ainsi, $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ est intégrable sur I comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I :
  $$f+g \in E$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$, montrons que $\lambda f \in E$. En exercice.

Conclure.

2) Cauchy-Schwarz.

Exercice 16
Si $M^\top = M^2$, alors $M = (M^\top)^2 = M^4$, puis $M^3 = I_n$.
Il reste à calculer $M^\top M = \dots$.

Exercice 17
Méthode.

1) Montrer que $M^\top M = I_3$. On en profite pour écarter le cas où $M^\top = M$, qui se traite autrement (cf cours : $u \in \mathscr{O}(E) \cap \mathscr{S}(E)$).

2) $\mathrm{Sp}\,(M) \subset \{-1, 1\}$. Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre : soit tester un vecteur $X \neq 0$ simple avec le calcul MX simple, soit résoudre $MX = X$. *Ne pas oublier le* $1/4$ *devant* M *!*

3) Si F est stable par $u \in \mathscr{O}(E)$, alors $F^\perp$ est aussi stable par u. Ainsi, dans une base compatible avec $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de u sera diagonale bloc.
Ici, plus modestement, on prends e_1' un vecteur propre trouvé à la question précédente, puis on cherche une base de $(\mathrm{Vect}\,(e_1'))^\perp$: on prends un vecteur e_2' orthogonal, et $e_3' = e_1' \wedge e_2'$.
Dans cette base la matrice de u s'écrira
$$M' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$
Où $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$, donc $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (sinon M' symétrique, donc M aussi, ce qui q été écarté à la question 1).

4) Avec $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, u est une rotation (car $\det u = \det M' = 1$), d'axe $E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1')$ et d'angle θ.

5) Si u est rotation d'angle θ, u^{2025} est la rotation d'angle 2025θ. Ici $1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}\,(u) = 8/4 = 2$. Donc $\cos\theta = 1/2$, et $\theta = \pm\pi/3$. Au signe près, u^{2025} est la rotation de 675π, donc de π : $u^{2025} = -\,\mathrm{id}_E$.

Exercice 20 **1)** Fait.

2) **a)** Calculer $f(a)$.

b) $1 \in \mathrm{Sp}\,(f)$ si et seulement si $E_1 \neq \{0\}$: chercher les $x \in E$ tels que $f(x) = x$.

c) On a décomposé $E = E_{1+\alpha} \oplus_\perp E_1$. Dans une base orthonormée (de vecteurs propres) associé à cette somme directe, la matrice de f est diagonale avec un « $1+\alpha$ » et $\dim E - 1$ « 1 » sur la diagonale.

3) C'est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect} a$. Notons le p. Ainsi, $f = \operatorname{id}_E + \alpha p$.

4) Si f est une isométrie, ses valeurs propres réelles sont inclues dans $\{-1, 1\}$. Réciproquement, si $\alpha = -2$, alors $f = \operatorname{id}_2 - 2p$ est une symétrie orthogonale, donc un isométrie.

5) M est orthogonale si et seulement si $M^\top M = I_3$, c'est-à-dire $a^2 + 2b^2 = 1$ et $2ab + b^2 = 0$ puis calculs. Autre approche : $M = (a+b)I_3 + bJ$ avec $J = (1)$. L'application p de matrice $1/3J$ est une projection ($J^2 = 3J$) orthogonale (J symétrique) sur $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Et l'application f de matrice M dans la base canonique s'écrit

$$f = (a+b)\operatorname{id}_E + 3bp$$

L'application f sera une isométrie et autoadjointe, donc c'est une symétrie orthogonale, donc $a+b = 1$ et $3b = -2$, ou $a+b = -1$ et $3b = 2$. Reste à décrire les symétries orthogonales associée : $E_1 = \dots$.

Exercice 22

Commencer par le théorème spectral : à un changement de base près, A symétrique signifie diagonale. S'il est question de l'existence de P tel que $A = P(B)$, il est bon de penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

D'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée. On effectue un changement de base, soit D la matrice diagonale associée. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres (positives) 2 à 2 distinctes de A.
Alors, $B' = D^2 + D + I_n$ est diagonale de valeurs propres $\mu_i = 1 + \lambda_i + \lambda_i^2$ pour $i \in [\![1, s]\!]$.
Comme la fonction $x \mapsto 1 + x + x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, les μ_i sont 2 à 2 distinctes. Il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus s tel que $P(\mu_i) = \lambda_i$. Puis, comme les matrices sont diagonales, $P(B') = D$.
Après changement de base, $P(B) = A$.
Le polynome P d'interpolation de Lagrange est $P = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i L_i$ où $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}$

Exercice 26 **1)** Faire des calculs blocs : $H = \begin{pmatrix} H_p & B^\top \\ B & A \end{pmatrix}$ car H est symétrique.

Mais surtout, H symétrique positive signifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \qquad X^\top H X \geqslant 0$$

En choisissant les $X = \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $X_p \in \mathbb{R}^p$ quelconque, il vient

$$\forall X_p \in \mathbb{R}^p, \qquad \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} H_p & B^\top \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_p^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_p X_p \\ B X_p \end{pmatrix} = X_p^\top H_p X_p \geqslant 0$$

2) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à H : $f : X \mapsto HX$.
Si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$. D'où, comme $F \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \;\middle|\; x \in F \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right\} \subset \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right\}$$

En passant au max, et en utilisant l'exercice sur le minimax,

$$\lambda_p \leqslant \lambda$$

Exercice 27
Racines.

1) Théorème spectral : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$, où E_λ est le sous-espace propre de u pour la valeur propre λ.

Unicité : Soit $v \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.
Comme $vu = v^3 = uv$, u et v commutent, donc les sous-espace propre de u sont stables par v.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, regardons les restrictions de u et v à E_λ. La restriction de u est $\lambda \,\mathrm{id}_{E_\lambda}$.
Soit $\widetilde{v} : E_\lambda \to E_\lambda$ la restriction de v. Comme $v^2 = u$, alors $\widetilde{v}^2 = \lambda \,\mathrm{id}_{E_\lambda}$. Les valeurs propres sont donc $\sqrt{\lambda}$ ou $-\sqrt{\lambda}$. Or v est positive, donc $\widetilde{v}$ aussi, et la seule valeur propre possible est $\sqrt{\lambda}$. De plus, $\widetilde{v}$ est symétrique, donc diagonalisable : on trouve $\widetilde{v} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$.
Notons $v_0 \in \mathscr{S}^+(E)$ l'endomorphisme construit lors de l'existence : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, la restriction $\widetilde{v}_0 : E_\lambda \to E_\lambda$ est $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$.
Ainsi, $v = v_0$ sur E_λ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Par linéarité, $v = v_0$ sur $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda = E$.

D'où l'unicité.

2) Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^p = y$, a une solution unique. On reprend la preuve précédente, sans avoir besoin d'imposer $\lambda \geqslant 0$ pour avoir l'unicité.

Exercice 28 **1)** Utiliser la caractérisation $X^\top AX \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $X = E_i$ le vecteur colonne nul avec un 1 en i-ème position et 0 ailleurs.

Alors, $AE_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ puis $E_i^\top AE_i = a_{ii}$.

2) Penser à la preuve de « p projecteur vérifie Bessel entraîne p projecteur orthogonal ».
Prendre $X_t = tE_i + E_j$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3) Théorème spectral : quitte à changer de base – ce qui laisse la trace inchangée – on peut supposer A diagonale, à diagonale positive. Alors $AB = (\lambda_j b_{ij})_{ij}$.

D'où $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii}$. Or, d'après 1, $b_{ii} \geqslant 0$. D'où $\mathrm{Tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 291 à 3 Écrire les définitions.

1) Idée : une inégalité mystérieuse avec des carrés : Cauchy-Schwarz ?
Prendre $X = E_i$ et $Y = E_j$.

2) $A = PDP^{-1} = PDP^\top$.

Exercice 30
DL4 2024.