1 Exercices d'application directe du cours

Exercice 1
Montrer que les applications $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont des produits scalaires sur E.

1) $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Commencer par vérifier que $\varphi(P, Q)$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels 2 à 2 distincts.
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.
Proposer une base orthonormée, et une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ canonique qui conserve la norme.

3) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(A, B) \in E$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$. Expliciter ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B.

Exercice 2
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire.
Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E\ \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$. Montrer que $y_1 = y_2$.
Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 3
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 4 (Schmidt)
Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ et $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$

2 Espaces, sous-espaces, orthogonalité, projections

Exercice 5
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ pour tout $(A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ défini un produit scalaire sur E en explicitant ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B. En déduire une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4) Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(M) = M^\top$. Montrer que, pour tout $M \in E$, $\|\varphi(M)\| = \|M\|$.

Exercice 6 (Un espace de fonctions)
Soit I un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur I.

1) Montrer que E est un espace vectoriel. Indication : $(a - b)^2 \geqslant 0$ *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) On admet que $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 7 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique ; et $F = \mathrm{Vect}\left((1, 2)\right)$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de $F^\perp$, puis une base de $F^\perp$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice M' de p_F dans $\mathscr{B}'$.
Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e'_1.
En déduire la matrice M de p_F dans $\mathscr{B}$. Donner une formule liant M et M'.

3) Distance $\mathrm{d}((1,1), F)$.

Exercice 8
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$$

(c'est le même espace qu'à l'exercice 5). Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.

1) Déterminez la dimension de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$.

2) En déduire une expression de $p_F(M)$, la projection orthogonale d'une matrice $M \in E$ sur F.

3) Donner $d(J, F)$, où J est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 9 (Un espace de suites)
On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Sur le modèle de la question 1 de l'exercice 6, on montre que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On note F l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

1) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $F^\perp = \{0\}$

4) En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

Exercice 10 (Projecteurs orthogonaux)
Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

1) Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.

2) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|\lambda x + y\|^2$.

3) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : *Penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 11 (Une famille de polynômes : Polynômes de Laguerre)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$, produit scalaire sur E d'après l'exercice 1.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $(X^i|X^j)$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

2) Application : minimiser une intégrale.

- **a)** Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **b)** En déduire la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- **c)** Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

3) Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degrés échelonnés [1].

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Donc $\deg P_n = n$: *par exemple* la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique.

b) Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]0,+\infty[$.
Indication : *Si on note* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *les racines de* P_n *dans* $]0,+\infty[$ *comptées avec multiplicité, et* $Q=\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$, *on pourra regarder* $(Q|P_n)$.
Bonus : prouver que ces racines sont simples.

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $W : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction $t \mapsto P(t)W(t)$ est intégrable sur I, alors on peut définir le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)W(t)\,\mathrm{d}t$ sur E.
En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre ($I=[-1,1]$, $W(x)=1$, CCINP 2018), de Tchebychev ($I=]-1,1[$, $W(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), de Hermite ($I=\mathbb{R}$, $W(x)=e^{-x^2}$ CCINP 2016), de Laguerre (étudiés ici, $I=\mathbb{R}_+$, $W(x)=e^{-x}$, ex1, CCINP 2019), etc...

Exercice 12 (Orthogonalité ; CCP 2013)
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que

$$F\subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \qquad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 13
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x,y)\in E^2 \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle$.
Montrer que f et g sont linéaires.

3 Isométries

Exercice 14
Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathscr{O}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^\perp$.

2) En déduire que si $(f-\mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 15 (OT 2012 Petites Mines)
Soit $M=(a_{ij})\in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i,j \quad |a_{ij}|\leqslant 1$ et $\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| \leqslant n$.
Indication : *Pour la première inégalité, revenir à la définition d'une matrice orthogonale.*
Pour la seconde, étudier $X^\top M X$ *avec un* X *bien choisi.*

Exercice 16 (CCP 2013)
Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M^\top = M^2$. Montrer que M est orthogonale.

Exercice 17 (De la matrice à l'endomorphisme)
Soit $E=\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ X & \mapsto & MX \end{array}$ où $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que u est une isométrie.

2) Rappeler les valeurs propres réelles possibles. Déterminer les éventuels sous-espaces propres.

3) Donner la matrice de u dans une base $\mathscr{B}'$ mieux adaptée.

4) Décrire u : si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle.

5) Calculer M^{2025}.

4 Endomorphismes autoadjoints

Exercice 18 (suite du 11)
Montrer que $f(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
cf. CCINP 2019 pour une réduction détaillée.

Exercice 19
Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables puis les diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale positive :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 20
Soit E un espace euclidien de dimension au moins 2, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

2) Éléments propres :

- **a)** Montrer que a est un vecteur propre de f.
- **b)** Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?
- **c)** Donner une matrice de f dans une base de vecteurs propres.

3) Que représente l'endomorphisme $x \mapsto \langle x, a\rangle a$ de E ?

4) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

5) Soit a et b deux réels, et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M soit une matrice orthogonale. Décrire l'endomorphisme associé.

Exercice 21
Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer M^2.

Exercice 22
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. On pose $B = A^2 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 23
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 24 (Principe du minimax)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme autoadjoint de E.
Nous noterons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses n valeurs propres, éventuellement comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1) Montrer que pour tout $x \in E$,
$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2.$$

2) Montrer que

$$\lambda_n = \max\left\{\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \ \middle|\ x \in E \quad \text{et} \quad x \neq 0\right\}$$
$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \ \middle|\ x \in E \quad \text{et} \quad x \neq 0\right\}$$

3) Soit e'_1 un vecteur propre pour la valeur propre λ_1. Montrer que

$$\lambda_2 = \min\left\{\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \ \mid\ x \in E,\ x \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, e'_1\rangle = 0\right\}$$

Exercice 25 (Matrices symétriques positives)
Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 26
Soit $H = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée symétrique réelle positive d'ordre n. Pour tout entier p de $[\![1,n]\!]$ on introduit la matrice $H_p = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

1) Démontrer que H_p est une matrice symétrique positive.

2) On note respectivement λ et λ_p les plus grandes valeurs propres de H et H_p. En utilisant le principe du minimax, et en considérant le sous-espace vectoriel $F = \{\begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} \ \mid\ X_p \in \mathbb{R}^p\}$ (écriture blocs) de $\mathbb{R}^n$, montrer que $\lambda \geqslant \lambda_p$.

Exercice 27
Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace vectoriel E euclidien.

1) **a)** Si u est positif, montrer qu'il existe $v \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

b) Montrer que ce v est unique. Indication : *Montrer que les sous-espace propre de u sont stables par v, et réduire $\tilde{v}$, la restriction de v à $E_\lambda(u)$.*

2) Soit $p \in \mathbb{N}$ impair. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathscr{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

Exercice 28 (Matrices symétriques positives : coefficients)
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} \geqslant 0$.

2) Si $i \in [\![1,n]\!]$ est tel que $a_{ii} = 0$, montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} = 0$.

3) Soit $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 29
Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons Φ_A l'application :

$$\Phi_A : (X,Y) \in E^2 \mapsto X^\top A Y \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que Φ_A est bilinéaire.

2) Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

3) Montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4) Si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $i \neq j$, $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.

5) Si A est symétrique réelle, justifier qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}'$. Écrire $\Phi_A(X,Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans $\mathscr{B}'$.

5 Autre application remarquable

Exercice 30
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $\langle x, y\rangle$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A^\top$.

a) Vérifier que l'on a $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

3) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\mathrm{Vect}\ u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.