1 Exercices d'application directe du cours

Exercice 1
Montrer que les applications $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont des produits scalaires sur E.

1) $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Commencer par vérifier que $\varphi(P, Q)$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels 2 à 2 distincts.
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.
Proposer une base orthonormée, et une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ canonique qui conserve la norme.

3) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(A, B) \in E$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$. Expliciter ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B.

Exercice 2
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire.
Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E\ \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$. Montrer que $y_1 = y_2$.
Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 3
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 4 (Schmidt)
Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ et $((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$

2 Espaces, sous-espaces, orthogonalité, projections

Exercice 5 (Un espace de matrices)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Déduire de l'écriture de $(A|B)$ une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4) Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(M) = M^T$. Montrer que, pour tout $M \in E$, $\|\varphi(M)\| = \|M\|$.

Exercice 6 (Un espace de fonctions)
Soit I un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur I.

1) Montrer que E est un espace vectoriel, puis que $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire.
Indication : $(a-b)^2 \geqslant 0$ *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 7 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique ; et $F = \mathrm{Vect}\,((1, 2))$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de $F^\perp$, puis une base de $F^\perp$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice de p_F dans $\mathscr{B}'$, puis dans $\mathscr{B}$.
Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e'_1 ,sans passer par les matrices que l'on vient d'obtenir.

3) Distance $\mathrm{d}((1,1), F)$.

Exercice 8 (Un espace de suites)
On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Sur le modèle de la question 1 de l'exercice 6, on montre que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On note F l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

1) Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $F^\perp = \{0\}$

4) En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

Exercice 9 (Projecteurs)
Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

1) Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.

2) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|\lambda x + y\|^2$.

3) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : *Penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 10 (Une famille de polynômes : Polynômes de Legendre)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Préliminaire : Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On distinguera les cas n pairs et n impairs. En déduire $(X^i|X^j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

2) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

3) Application : minimiser une intégrale.

- **a)** Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **b)** En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- **c)** Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

4) Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degré échelonné [1].

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.
- **b)** Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]-1, 1[$.
Indication : *Si on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ les racines de P_n dans $]-1,1[$ comptées avec multiplicité, et $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on pourra regarder $(Q|P_n)$.*
Bonus : prouver que ces racines sont simples.

1. i.e. ici $\deg P_n = n$: par exemple la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $W : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction $t \mapsto P(t)W(t)$ est intégrable sur I, alors on peut définir le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)W(t)\,\mathrm{d}t$ sur E.
En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre (étudiés ici, $I = [-1, 1]$, $W(x) = 1$, CCINP 2018), de Tchebychev ($I =]-1, 1[$, $W(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-x^2}$ CCINP 2016), de Laguerre ($I = \mathbb{R}_+$, $W(x) = e^{-x}$, ex1, CCINP 2019), etc...

Exercice 11 (Orthogonalité ; CCP 2013)
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \qquad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 12
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle$.
Montrer que f et g sont linéaires.

3 Isométries

Exercice 13
Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathscr{O}(E)$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) = \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^\perp$.

2) En déduire que si $(f - \operatorname{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \operatorname{id}_E$.

Exercice 14 (OT 2012 Petites Mines)
Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i, j \quad |a_{ij}| \leqslant 1$ et $\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| \leqslant n$.
<u>Indication</u> : *Pour la première inégalité, revenir à la définition d'une matrice orthogonale.*
Pour la seconde, remarquer que $\langle x, y\rangle = X^T Y$ dans une base orthonormée, puis appliquez Cauchy-Schwarz.

Exercice 15 (CCP 2013)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^T = A^2$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 16 (De la matrice à l'endomorphisme)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ X & \mapsto & MX \end{array}$ où $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que u est une isométrie.

2) Rappeler quelles sont les valeurs propres possibles. Déterminer les éventuels sous-espaces propres.

3) Donner la matrice de u dans une base $\mathscr{B}'$ mieux adaptée.

4) Décrire u : si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle.

5) Calculer M^{2020}.

4 Endomorphismes symétriques

Exercice 17 (suite du 10)
Montrer que $f(P) = 2XP' + (X^2 - 1)P'' = ((X^2 - 1)P')'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 18
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Exercice 19
Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Éléments propres :

- **a)** Montrer que a est un vecteur propre de f.
- **b)** Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?
- **c)** Donner une matrice de f dans une base de vecteurs propres.

3) Que représente l'endomorphisme $x \mapsto \langle x, a\rangle a$ de E ?

4) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

5) Soit a et b deux réels, et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M soit une matrice orthogonale. Décrire l'endomorphisme associé.

Exercice 20
Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et notons pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Φ_A l'application :

$$\Phi_A : (X, Y) \in E^2 \mapsto X^T A Y \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que Φ_A est bilinéaire.

2) Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

3) Montrons que : Φ_A est un produit scalaire $\Longrightarrow \operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- **a)** Montrer que si A est non inversible, Φ_A n'est pas un produit scalaire (même si A est symétrique).
- **b)** Montrer que si Φ_A est un produit scalaire, $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

4) Réciproque et conclusion.

- **a)** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, est-ce que Φ_A est un produit scalaire ?
- **b)** Montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique avec $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

5) Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, exprimer $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coefficients de X et Y.

6) Si A est symétrique réelle, justifier qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}'$. Écrire $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 21
Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables plus les diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale positive :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Indication : *Regarder* $\|AX\|^2$ *où* X *est un vecteur propre de* S.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$. Dans quel cas A est-elle inversible ?

3) On considère un espace euclidien E. Soit f un endomorphisme symétrique de E. On note λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre de f. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\lambda\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \mu\|x\|^2.$$

5 Autres applications remarquables

Exercice 23 (BCE 2013 S)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $\langle x, y \rangle$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A^T.

- **a)** Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
- **b)** Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

3) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

- **a)** Montrer que λ est valeur propre de f^*.
- **b)** On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\text{Vect } u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 24 (Formes linéaires)
Soit E euclidien et $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

1) Montrer que $\Psi : E^* \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Psi(f, x) = f(x)$ est une forme bilinéaire.

2) Soit φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle a, x \rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire, bijective.

3) Exemple d'application. On muni $\mathbb{R}[X]$ (respectivement $\mathbb{R}_n[X]$) du produit scalaire

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

- **a)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f \in E^*$ définie par $f(P) = P(1)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
  Montrer qu'il existe un unique $A \in E$ tel que

$$\forall P \in E, \qquad P(1) = \langle A, P \rangle$$

  Montrer que A admet exactement n racines 2 à 2 distinctes dans $]-1, 1[$.

- **b)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il n'existe pas de $A \in E$ tel que

$$\forall P \in E, \qquad P(1) = \langle A, P \rangle$$

  Ainsi, le résultat de la question 2 est profondément lié à la dimension finie.