

Exercice 1

Calculer les déterminants des matrices suivantes, sous la forme la plus factorisée possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad xI_3 - A \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad xI_3 - B \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (ij)_{1 \leq i,j \leq n} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (c'est-à-dire $M^T = -M$). Montrer que n impair entraîne M non inversible.

Exercice 3 (cours)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer par récurrence que

$$\det V_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Où

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Indication : effectuer l'opération suivante : $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k C_k$, avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 4

Soit A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A + C - B \end{pmatrix} = \det(A + C) \det(A - B)$$

Exercice 5 (OT 237 — 2011 PT)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et a, b, c, d .

Exercice 6

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que P est inversible.
- 2) Calculer AP , en déduire $\det(AP)$ puis $\det(A)$.

Exercice 7

On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.