Exercices : Algèbre Linéaire

Exercice 1
Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0,1] \qquad T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E.

Exercice 3
Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(f)(x) = \int_0^x \sin(t-x) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que u est un endomorphisme de E. (Indication : *Se ramener à une intégrale sans paramètre*).

2) L'endomorphisme u est-il surjectif ?

Exercice 4
Soit $E = \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E.

2) Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in E^{n+1}$ des *fonctions* fixées. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme

$$\forall y \in E \qquad \varphi(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

3) En déduire que les solutions d'une équation différentielle linéaire $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ forment un sous-espace vectoriel.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que u défini par $u(P) = P'$ est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image. Mêmes questions avec $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 (cours)
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Montrer que

a) $g(\mathrm{Ker}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$ **b)** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$ **c)** $g(\mathrm{Im}\ f) \subset \mathrm{Im}\ f$

En déduire que $f(\mathrm{Ker}\ g) \subset \mathrm{Ker}\ g$, $f(E_\lambda(g)) \subset E_\lambda(g)$ et $f(\mathrm{Im}\ g) \subset \mathrm{Im}\ g$.
Remarque : Si F est un sous-espace vectoriel de E, on que F **est stable par** f lorsque $f(F) \subset F$. Nous venons de montrer la propriété classique suivante :
Si f et g commutent, alors les noyau, sous-espaces propres (E_λ) et image de l'un sont stables par l'autre.

Exercice 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Pour les deux premières questions, procéder par double implications et double inclusions.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\ u \subset \mathrm{Ker}\,(v \circ u)$ puis que $\mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \mathrm{Ker}\ u \iff \mathrm{Ker}\ v \cap \mathrm{Im}\ u = \{0\}$

2) Montrer que $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\ v$ puis que $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \mathrm{Im}\ v \iff \mathrm{Ker}\ v + \mathrm{Im}\ u = E$

3) On suppose E de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$ **b)** $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$ **c)** $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$

Exercice 8
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent c'est-à-dire tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$.
Montrer que $\mathrm{id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 9
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et que

$$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$$

2) Soit $\mathscr{P}_0$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 et K l'ensemble des fonctions constantes. Montrer que $\mathscr{P}_0$ et K sont des sous-espaces vectoriels et que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = K \oplus \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{I}$

Exercice 10
Montrer que $E_1 = \{(a,a,a) | a \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) | x+y+z=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $P = X(X-1)^2$ soit un polynôme annulateur de u.

1) Calculer u^n pour $n \in \mathbb{N}$ (on vérifiera la formule obtenue pour $n=0$ et $n=1$).

2) Montrons que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)^2 = E$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)^2$.
- **b)** Montrer que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)^2$
- **c)** On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)^2 = E$.

Exercice 12
Montrer que les familles suivantes sont libres :

1) $((1,1,1,1),(0,1,2,0),(0,0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^4$.

2) $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \left| x - \dfrac{1}{k} \right|$.

4) $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{ax}$.

5) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \geqslant 2$/ $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.

Exercice 13
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

2) $2x + 3y + z - t = 0$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = & 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = & 13 \end{array}\right.$

Exercice 14 (D'après Centrale-Supélec PC)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

- **a)** Montrer que n est pair et déterminer le rang de f en fonction de n.
- **b)** Montrer que $f \circ f = 0$.

2) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg} f$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
- **b)** Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15
Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$. Donner un exemple.

Exercice 16
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$ tels que $\mathscr{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre[1]. Posons

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) \to E \\ \quad v \mapsto v(x) \end{cases}$$

1) Montrer que $(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre.

2) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

3) Montrer que φ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}(u)$ dans E.

4) En déduire que $\mathscr{C}(u) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$.

Exercice 17 (centre de $\mathscr{L}(E)$)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le but de cet exercice est de déterminer le *centre* de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire les endomorphismes qui commute avec tous les endomorphismes :

$$Z(\mathscr{L}(E)) = \{f \in \mathscr{L}(E) \ \mid \ \forall g \in \mathscr{L}(E)\ f \circ g = g \circ f\}$$

Soit $f \in Z(\mathscr{L}(E))$ fixé.

1) Soit $x \in E$ non nul fixé. Montrer qu'il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. <u>Indication</u> : *utiliser un projecteur p_x sur* $\mathrm{Vect}\,(x)$.

2) Soit x et $y \in E$, non nuls et colinéaires. Avec les notations de la question précédente, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

3) Même question avec x et y non colinéaires. <u>Indication</u> : *écrire une expression combinant x et y.*

4) En déduire qu'il existe un scalaire λ tel que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$.

5) Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E ?

Exercice 18 (Dual)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Dans cette question, supposons E de dimension finie n, et notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons $e_i^* \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ la forme linéaire définie par

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

  a) Montrer que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

  b) Pour $x \in E$, déterminer les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ à l'aide de $\mathscr{B}^*$.

  c) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}^*$. En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*, et la dimension de E^*.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer qu'il existe F, sous-espace vectoriel de dimension 1 de E, tel que $E = F \oplus \mathrm{Ker}\ \varphi$. ($\mathrm{Ker}\ \varphi$ est donc un hyperplan).

3) Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $\psi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $\mathrm{Ker}\ \varphi \subset \mathrm{Ker}\ \psi$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 19
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts, et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue.
Déterminer $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 f(t)P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k)$$

Exercice 20
Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ f$ dans E.

1. Par exemple si $u^n(x) = 0$ et $u^{n-1}(x) = 0$, mais pas nécessairement.

1) Montrer que l'application $\widetilde{f} : H \to f(E)$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ est un isomorphisme (Indication : *on pourra commencer par montrer la linéarité, puis l'injectivité, et la surjectivité*).

2) On suppose désormais E et E' de dimensions finies respectives p et n. Trouver des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et E' pour que la matrice de f dans ces bases soit la plus simple possible.

3) (Chapitre suivant) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Indication : *Utiliser les questions 1 et 2.*

a) Montrer que $M = PJ_rQ$ avec P et Q des matrices inversibles et $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

b) Montrer que $M = P'I_rQ'$ avec $P' \in \mathscr{M}_{n,r}$ et $Q' \in \mathscr{M}_{r,n}$ deux matrices de rang maximal possible (que l'on précisera).

Exercice 21 (factorisation)
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v) \iff \exists w \in \mathscr{L}(F,G) \quad v = w \circ u$$

1) On suppose qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.

2) On suppose $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.
On s'appuie sur les résultats de l'exercice 20 : On note H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ u$ dans E, et $\widetilde{u} : H \to \mathrm{Im}\ u$ l'isomorphisme obtenu en restreignant u. Notons $p_H \in \mathscr{L}(E)$ la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Ker}\ u$ et $p_{\mathrm{Im}\ u} \in \mathscr{L}(F)$ une projection sur $\mathrm{Im}\ u$.
Construire w qui vérifie $v = w \circ u$.