Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (Banque PT 2024)

Partie A

1) **a)** Comme $X_A(\Omega) = \{0,1\}$, X_A suit une loi de Bernoulli. De plus, $(X_A = 1)$ est l'événement « Alice tire un bonbon à la menthe ». Il y a 10 bonbons à la menthe sur 20 au total :

$$\boxed{X_A \sim \mathscr{B}(1/2)}$$

b) $\boxed{E(X_A) = p = 1/2 \text{ et } V(X_A) = p(1-p) = 1/4}$

2) **a)** $(X_A = 0, X_C = 0)$ est l'événement A tire un nougat puis C tire un bonbon à la menthe.

$$P(X_A = 0, X_C = 0) = P(X_A = 0)P_{(X_A=0)}(X_C = 0)$$

Après le tirage d'A, il reste 9 nougats et 10 menthes. Donc $P_{(X_A=0)}(X_C = 0) = 10/19$. Ainsi,

$$\boxed{P\left(X_A = 0, X_C = 0\right) = \frac{5}{19}}$$

b) $P(X_A = 0) = P(X_A = 0, X_C = 0) + P(X_A = 0, X_C = 1)$.
Donc $P(X_A = 0, X_C = 1) = 1/2 - 5/19 = 9/38$.
Par symétrie des rôles joués par nougats et menthes, $P\left(X_A = 1, X_C = 1\right) = 5/19$, et on remplit la dernière case à l'aide de la loi de X_A :

$X_A \backslash X_C$	1	0	Loi de X_A
1	5/19	9/38	1/2
0	9/38	5/19	1/2

3) La formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $(X_A = k)_{k=0,1}$ nous donne

$$P(X_C = 1) = P\left(X_A = 1, X_C = 1\right) + P(X_A = 0, X_C = 1) = 1/2$$

Ainsi, $\boxed{X_C \sim \mathscr{B}(1/2)}$

Si on note $p = P(X_C = 1)$, lorsqu'on interverti nougats et menthes, les effectifs étant les même, on trouve $1 - p = P(X_C = 1)$, et donc $p = 1 - p = 1/2$.

4) **a)** Comme X_A et X_C suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$, $E(X_C) = E(X_A) = 1/2$. De plus, par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned} E(X_A X_C) &= \sum_{(i,j)\in\{0,1\}^2} ij P(X_A = i, X_C = j) \\ &= P(X_A = 1, X_C = 1) \\ &= 5/19 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\operatorname{Cov}\left(X_A, X_C\right) = 5/19 - 1/4 = 1/76}$$

b) Non : $X \perp\!\!\!\perp Y$ entraîne $\text{Cov}\,(X,Y) = 0$, donc par contraposition

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_A \text{ et } X_C \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

5) Il y a 0, 1 ou 2 bonbons à la menthe tirés, et Alice les récupèrent tous : $Y_A(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

6) **a)** Y compte le nombre total de bonbons tirés, indépendamment des échanges, donc $Y = 2$ et

$$\boxed{Y \text{ suit la loi constante égale à } 2}$$

b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(YY_A) = E(2Y_A) = 2E(Y_A) = E(Y)E(Y_A)$$

D'où

$$\boxed{\text{Cov }(Y, Y_A) = 0}$$

c) Par linéarité à gauche de la covariance,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\,(Y, Y_A) &= \text{Cov}\,(Y_A + Y_C, Y_A) \\
&= \text{Cov}\,(Y_A, Y_A) + \text{Cov}\,(Y_C, Y_A) \\
&= V(Y_A) + \text{Cov}\,(Y_C, Y_A)
\end{aligned}$$

d) Comme $\text{Cov}\,(Y, Y_A) = 0$ et $V(Y_A) = E\Big((Y_A - E(Y_A))^2\Big) \geqslant 0$ (par croissance de l'espérance),

$$\boxed{\text{Cov }(Y_A, Y_C) = -V(Y_A) \leqslant 0}$$

7) Au premier tirage, Alice conserve X_A bonbons. Au 2e tirage, elle récupère $1 - X_C$ bonbons. D'où

$$\boxed{Y_A = 1 + X_A - X_C}$$

8) Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(Y_A) = 1 + E(X_A) - E(X_C) = 1}$$

Et

$$\begin{aligned}
V(Y_A) &= V(X_A - X_C) && \text{car } V(X+c) = V(X) \\
&= V(X_A) - 2\,\text{Cov}\,(X_A, X_C) + V(X_C) && \text{Lemme} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{38} \\
&= \frac{19 - 1}{2 \times 19} \\
&= \frac{9}{19}
\end{aligned}$$

9) Supposons $Y_A \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(Y_A) = np = 1$ et $V(Y_A) = np(1-p) = 9/19$.
D'où $(1 - p) = 9/19$ puis $p = 10/19$, et donc $n = 1/p = 19/10$.
Or, dans une loi binomiale, n est entier : c'est absurde.

$$\boxed{\text{La loi de } Y_A \text{ n'est pas une loi binomiale}}$$

Partie B

1) **a)** Tant qu'Alice n'a pas tiré de menthe, elle tire avec une probabilité $p = 6/16$ d'obtenir un bonbon à la menthe.
Il s'agit d'une suite de tirages indépendants, avec même probabilité $p \in]0,1[$ de succès.
Si elle mange son premier bonbon au bout de $Z_1 = k$ tirages, elle a eu $k-1$ échecs et un succès :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Z_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Donc

$$\boxed{Z_1 \sim \mathscr{G}(3/8)}$$

Z_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = 3/8$, avec $Z_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

b) $E(Z_1) = 1/p = 8/3$. Et $V(Z_1) = (1-p)/p^2$.

c) Pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_1 = k) t^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^k \\ &= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{8} t\right)^k \end{aligned}$$

Cette série converge si et seulement si $|(5/8)t| < 1$, donc

$$\boxed{D_1 =]-8/5, 8/5[}$$

d) Pour $t \in D_1$,

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \frac{3}{5}\left[-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{8} t\right)^k\right] \\ &= \frac{3}{5}\left[-1 + \frac{1}{1-(5/8)t}\right] \end{aligned}$$

On peut aussi décaler les indice, et on obtient une forme factorisée de la fraction rationnelle. Mais pour dériver, c'est moins pratique.

e) Soit on dérive k fois G_1. Soit on utilise le développement en série entière : Une fonction développable en série entière est égale à sa série de Taylor :

$$\forall t \in D_1, \quad G_1(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_1 = k) t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{G_1^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

Ainsi, par unicité du développement en série entière,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad G_1^{(k)}(0) = p(1-p)^{k-1} k!}$$

$G_1(0) = P(Z_1 = 0) = 0$

2) Pour Z_2, la probabilité de succès est désormais $p = 5/15 = 1/3$, donc

$$Z_2 \sim \mathscr{G}(1/3), \quad E(Z_2) = 3,\ V(Z_2) = 6,\ D_2 = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[,\ G_2(0) = 0,\ G_2^{(k)}(0) = k! \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^*$$

3) On pose $Z = Z_1 + Z_2$ et on note G la fonction génératrice de Z.

a) Z représente le nombre total de bonbon tirés lorsqu'Alice mange son deuxième bonbon. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2) = 8/3 + 3}$$

b) Alice ayant mangé 2 bonbons, elle en a tiré au moins 2. $Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

c) Montrons que $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$: Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Les événements $(Z_1 = i)$ et $(Z_2 = j)$ dépendent respectivement de $M_1, \ldots, M_i$ et de $M_{i+1}, \ldots, M_{i+j}$.
Or les M_n sont mutuellement indépendants.
Donc $(Z_1 = i)$ et $(Z_2 = j)$ sont indépendants. Ainsi, $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$.
Par conséquent, par indépendance, pour tout $t \in D_1 \cap D_2$,

$$\boxed{G(t) = E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2}) = G_1(t)G_2(t)}$$

d) Les fonctions G, G_1 et G_2 sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (séries entières). Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $t \in D_1 \cap D_2$,

$$G^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_1^{(k)}(t) G_2^{(n-k)}(t)$$

Comme $G_1(0) = G_2(0) = 0$,

$$\boxed{G^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} G_1^{(k)}(0) G_2^{(n-k)}(0)}$$

e) Remplaçons par les valeurs trouvées aux questions 1e et 2 : avec $p_1 = 3/8$ et $p_2 = 1/3$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{aligned} G_1^{(k)}(0) &= k! p_1 (1-p_1)^{k-1} \\ G_2^{(k)}(0) &= k! p_2 (1-p_2)^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k! p_1 (1-p_1)^{k-1} (n-k)! p_2 (1-p_2)^{n-k-1} \\
&= n! p_1 p_2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-p_1)^{k-1} (1-p_2)^{n-k-1} \\
&= n! p_1 p_2 (1-p_2)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{k-1} \\
&= n! p_1 p_2 (1-p_2)^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{k} & \text{Or } p_1 \neq p_2 \text{ donc } q = \frac{1-p_1}{1-p_2} \neq 1 \\
&= n! p_1 p_2 (1-p_2)^{n-2} \left[1 - \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{n-1} \right] \left(1 - \frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{-1} \\
&= n! p_1 p_2 (1-p_2)^{-1} \left[(1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^{n-1} \right] \left(\frac{1-p_2}{p_1-p_2} \right) \\
&= n! \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \left[(1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs de p_1 et p_2, il vient

$$\boxed{G^{(n)}(0) = 3n! \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8} \right)^{n-1} \right)}$$

f) Par unicité du développable en série entière,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad P(Z=n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!} = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right)}$$

g) Par définition, l'espérance d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ est

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Z=n) \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Cette somme peut partir de $n=0$ car les termes correspondants sont nuls pour $n=0$ et $n=1$.

Mais on peut alors utiliser la formule de la dérivée d'une série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ avec $x = \dfrac{2}{3}$ puis $x = \dfrac{5}{8}$, on retrouve bien finalement le résultat de la question 3.(a) car on a :

$$\boxed{E(Z) = 3\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{1}{(1-5/8)^2}\right) = 3\left(9 - \frac{64}{9}\right) = \frac{17}{3}}$$

Partie C

1) $a+c$ représente la proportion de bonbons dans le paquet de bonbons : $a+c=1$.

2) **a)** Comme les tirages s'arrêtent dès qu'un enfant a mangé un bonbon, tous les tirages précédents sont des échecs.

Le premier tirage est fait par C : $M_1 \cap N_2 \cap M_3 \cap \dots$.

Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{C_{2p+1} = M_1 \cap N_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap N_{2p} \cap N_{2p+1} = \left(\bigcap_{k=1}^{p} M_{2k-1} \cap N_{2k}\right) \cap N_{2p+1}}$$

b) Par indépendance des tirages, $\boxed{P\left(C_{2p+1}\right) = (ac)^p c}$

c) Comme C ne tire jamais le $2p$-ième bonbon, il ne le mange pas non plus, quel que soit l'issue du tirage :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad C_{2p} = \emptyset \quad \text{et} \quad P\left(C_{2p}\right) = 0}$$

3) Comme $(B=1) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k$, l'union étant disjointe, il vient,

$$\begin{aligned} P(B=1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(C_k) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(C_{2p+1}) \\ &= c\sum_{p=0}^{+\infty} (ac)^p \\ &= \frac{c}{1-ac} \end{aligned}$$

4) En notant A_n l'événement « Alice a mangé un menthe au n-ième tirage », $A_{2p+1} = \emptyset$ et pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A_{2p+2} = \left(\bigcap_{k=1}^{p} M_{2k-1} \cap N_{2k}\right) \cap M_{2p+1} \cap M_{2p+2}$$

D'où $P(A_{2p+2}) = a^2(ac)^p$ puis

$$\begin{aligned} P(B=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(A_{2p+2}) \\ &= a^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (ac)^p \\ &= \frac{a^2}{1-ac} \end{aligned}$$

5) $(B=k)_k$ est un système complet d'évènements donc

$$P(B=-1) = 1 - P(B=0) - P(B=1) = \frac{1-ac-c-a^2}{1-ac} = \frac{1-a(1-a)-(1-a)-a^2}{1-ac} = 0$$

La probabilité du « match nul » est nulle : c'est classique dans ce type de situation géométrique.

6) Pour qu' Alice et Cyril aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon, il suffit (et il faut) que $P(B=0) = P(B=-1)$ avec toujours $a+c=1$ et $(a,c) \in]0,1[^2$

Or ceci a bien une solution puisque cela revient à résoudre dans notre domaine $]0,1[^2$ le système :

$$\begin{cases} a+c=1, a>0 \\ a^2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a+a^2=1, a>0 \\ c=1-a \end{cases} \iff a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, c = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\text{Avec } a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ et } c = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\text{, Alice et Cyril auront autant de chance l'un que l'autre.}}$$

Peut-être que la réponse attendue était « non » : il y a un nombre entier de bonbons, et a et c étant irrationnels (car $\sqrt{5}$ l'est, à prouver), on ne peut pas atteindre exactement les proportion a et c souhaitées.