Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Ce problème est composé de 3 parties indépendantes, chacune d'elle étant l'étude d'un tirage différent dans un paquet de bonbons effectué par deux enfants Alice et Cyril.
Dans l'ensemble du problème :

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geqslant 1$,

- M_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe » ;
- N_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un nougat ».

Partie A

Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.
On note :

- X_A la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe, et égale à 0 si Alice tire un nougat.
- X_C la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat, et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1) **a)** Quelle est la loi de X_A ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
b) Donner les valeurs de l'espérance et la variance de X_A.

2) **a)** Déterminer $P(X_A = 0, X_C = 0)$.
b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_A, X_C).

3) En déduire la loi de X_C. Une justification est attendue.

4) **a)** Vérifier que la covariance $\operatorname{Cov}(X_A, X_C)$ de X_A et X_C vaut $\dfrac{1}{76}$.
b) Les variables aléatoires X_A et X_C sont-elles indépendantes ?

Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.
On note alors :

- Y_A la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;
- Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.

5) Justifier que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de Y_A est égal à $\{0; 1; 2\}$.

6) **a)** Quelle est la loi de $Y = Y_A + Y_C$?
b) En déduire que la covariance $\operatorname{Cov}(Y, Y_A)$ de Y et Y_A est nulle.
c) Démontrer que $\operatorname{Cov}(Y, Y_A) = \operatorname{V}(Y_A) + \operatorname{Cov}(Y_A, Y_C)$ où $\operatorname{Cov}(Y_A, Y_C)$ est la covariance de Y_A et Y_C et $\operatorname{V}(Y_A)$ la variance de Y_A.
d) En déduire le signe de $\operatorname{Cov}(Y_A, Y_C)$.

7) Justifier que $Y_A = 1 + X_A - X_C$.

8) En déduire l'espérance de Y_A et démontrer que sa variance vaut $\dfrac{9}{19}$.

9) A l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de Y_A n'est pas une loi binomiale.

Partie B

Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 6 bonbons à la menthe.
Alice tire dans le paquet des bonbons 1 par 1 .
Si c'est un nougat, elle le remet dans le paquet.
Si c'est un bonbon à la menthe, elle le mange.
Les tirages s'arrêtent lorsque Alice a mangé deux bonbons.
On note :

- Z_1 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés au moment où Alice mange son premier bonbon ;
- Z_2 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés après qu'Alice a mangé le premier bonbon et au moment où Alice mange son deuxième bonbon.
- G_1 la fonction génératrice de Z_1
- G_2 la fonction génératrice de Z_2.
- D_1 le domaine de définition de G_1 et D_2 celui de G_2.

On admet que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

1) **a)** Reconnaitre la loi de Z_1. Une réponse argumentée est attendue.
On précisera son nom, son ou ses paramètres, l'univers image $Z_1(\Omega)$ et les valeurs des probabilités $P(Z_1 = k)$ pour k dans $Z_1(\Omega)$.

b) Donner l'espérance et la variance de Z_1.

c) Justifier que $\forall t \in D_1, G_1(t) = \dfrac{3}{5} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{8}t\right)^k$ et déterminer D_1.

d) Déterminer pour tout $t \in D_1$, l'expression de $G_1(t)$ à l'aide des fonctions usuelles.

e) Déterminer la valeur de $G_1^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. Préciser $G_1(0)$.

2) Donner, sans les justifier, la loi de Z_2, son espérance et sa variance, $D_2, G_2(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

3) On pose $Z = Z_1 + Z_2$ et on note G la fonction génératrice de Z.

a) Que représente Z ? Quelle est son espérance ?

b) Donner l'univers image $Z(\Omega)$ de Z.

c) Exprimer pour tout $t \in D_1 \cap D_2, G(t)$ en fonction de $G_1(t)$ et $G_2(t)$.

d) A l'aide de la formule de Leibniz, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à $2, G^{(n)}(0)$ en fonction de $G_1^{(k)}(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour des valeurs non nulles de k bien choisies.

e) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $G^{(n)}(0) = 3n!\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}\right)$

f) En déduire $P(Z = n)$ pour tout $n \in Z(\Omega)$.

g) En utilisant la définition de l'espérance, retrouver la valeur de l'espérance de Z.

Partie C

Dans cette partie, la proportion des bonbons à la menthe dans le paquet est notée a et celle des nougats est notée c avec $(a, c) \in]0; 1\left[^2\right.$.
Le tirage des bonbons dans le paquet répond au protocole suivant :

- Les enfants tirent à tour de rôle un bonbon dans le paquet.

◦ Lorsqu'un enfant tire un bonbon qu'il aime, il le mange, sinon il le remet dans le paquet.

- Les tirages s'arrêtent dès qu'un enfant a mangé un bonbon.
- Cyril effectue le premier tirage.

On note B la variable aléatoire égale à 1 si c'est Cyril qui a mangé un bonbon, égale à 0 si c'est Alice qui a mangé un bonbon et égale à -1 dans les autres cas.

1) Justifier que $a + c = 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul. On note C_n l'événement : « Cyril a mangé un nougat au n-ème tirage ».

  a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer C_{2p+1} en fonction d'événements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis.

  b) En déduire $P\left(C_{2p+1}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

  c) Que peut-on dire de C_{2p} et $P\left(C_{2p}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$?

3) Etablir à l'aide des questions précédentes que $P(B = 1) = \dfrac{c}{1 - ac}$.

4) Démontrer de même que $P(B = 0) = \dfrac{a^2}{1 - ac}$.

5) En déduire la valeur $P(B = -1)$. Interpréter ce résultat.

6) Est-il possible de posséder un paquet de bonbons tel que Alice et Cyril aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon ?