 

# Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

---

## Exercice 1 (Mines-Ponts PC 2017)

**1)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_k(\Omega) = [\![1,5]\!]$, $(S_k = i)_{i \in [\![1,5]\!]}$ forme un système complet d'événements. La formule des probabilités totales nous donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}\Big((S_{k+1} = 1) \cap (S_k = i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = i)\mathbb{P}(S_k = i) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k = i)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k = i)}$$

**2)** La formule des probabilités totales appliquée aux évènements $(S_{k+1} = i)$ à l'aide du système complet d'événements $(S_k = j)_{j \in [\![1,5]\!]}$ s'écrit

$$\forall i \in [\![1,5]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j)\mathbb{P}(S_k = j)$$

Matriciellement, il vient

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S_{k+1} = 1 | S_k = 1) & \cdots & P(S_{k+1} = 1 | S_k = 5) \\ \vdots & & \vdots \\ P(S_{k+1} = 5 | S_k = 1) & \cdots & P(S_{k+1} = 5 | S_k = 5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} = BX_k$$

Avec la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j) \in [\![1,5]\!]^2}$ où $b_{ij} = \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j)$.
Donc, pour $i = 2$, puis 3 etc...

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 2) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 2 | S_k = j)\mathbb{P}(S_k = j) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 3) + \mathbb{P}(S_k = 5)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 3) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 2) + \mathbb{P}(S_k = 4)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 3) + \mathbb{P}(S_k = 5)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 2) + \mathbb{P}(S_k = 4))
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

**3)** Pour tout $j \in [\![1,5]\!]$, $\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j) = P(\Omega | S_k = j) = 1$, donc

$$^tB \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 5) \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ est un vecteur propre de } {}^tB, \text{ et } 1 \text{ est la valeur propre associée.}}$$

**4)** Montrons que $X_0 \in E_1(B)$ :

$$BX_0 = \begin{pmatrix} 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \end{pmatrix} = X_0$$

Comme $X_{k+1} = BX_k$ entraîne $X_k = B^k X_0$, il vient, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_k = B^k X_0 = X_0$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les } S_k \text{ ont toute la loi de } S_0}$$

**5)** *Quand il y a des zéros – dans les lois conditionnelles et donc dans les lois de couples – il est peu probable que les variable aléatoire discrète soient indépendantes.*
$\mathbb{P}(S_0 = 2 \cap S_1 = 4) = 0 \neq \mathbb{P}(S_0 = 2) \times \mathbb{P}(S_1 = 4)$. Ainsi,

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

# **Exercice 2** (Autour du paradoxe de Penney)

## **Partie 1** (Le match nul)

**1)** Étude de la variable aléatoire discrète $T$.

**a)** $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

**b)** L'évènement $(T = 1)$ est « le premier paquet est FPP » :

$$\boxed{(T = 1) = (X_1 = F, X_2 = P, X_3 = P)}$$

Comme les $(X_k)_k$ sont mutuellement indépendantes,

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(X_1 = F)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = P) = qp^2}$$

**c)** La variable aléatoire $T$ suit une loi géométrique :
Notons $Y_n$ la variable aléatoire discrète qui vaut 1 quand $(X_{3n+1}, X_{3n+2}, X_{3n+3}) = (F, P, P)$ et 0 sinon. Les $(Y_n)_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $qp^2$, et sont mutuellement indépendantes (car elles dépendent de $X_k$ différents). La variable aléatoire discrète $T$ est le temps du premier succès. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(Y_1 = 0)\dots\mathbb{P}(Y_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_n = 1) = (1 - qp^2)^{n-1}qp^2}$$

**d)** Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{1 - (1 - qp)} qp^2 = 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 0}$$

**e)** Par conséquent,

$$\boxed{T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } qp^2, \text{ et } E(T) = \frac{1}{qp^2}}$$

**2)** Si le motif « FPP » n'apparaît jamais $(H)$, a fortiori il n'apparaît jamais dans un paquet $(X_{3n+1}, X_{3n+2}, X_{3n+3})$.

$$\boxed{H \subset (T = +\infty)}$$

**3)** Par croissance, $\mathbb{P}(H) \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ : $\mathbb{P}(H) = 0$.

$$\boxed{\text{le jeu se termine presque sûrement}}$$

Le paradoxe du singe : un singe devant une machine à écrire finira par écrire tout ce qui a jamais été écrit jusqu'ici (tout motif fini par apparaître). Mais le temps moyen d'apparition est évidemment très très élevé.

**Partie 2** (Premier motif apparu)

**1)** Les motifs étant de longueur 3, aucun joueur ne peut avoir gagné la partie avant 3 lancers :

$$\boxed{\forall n \in \{1, 2\}, \quad \mathbb{P}(E_n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = 0}$$

**2)** Cas $n = 3$.

**a)** C'est l'évènement $\boxed{A_3 = (X_1 = P) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = F)}$

**b)** Par indépendance mutuelle des $(X_k)_k$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(X_1 = P)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = F) = p^2q}$$

**c)** De même, $B_3 = (X_1 = F) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = P)$ et

$$\boxed{\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(X_1 = F)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = P) = p^2q}$$

Et, comme $E_3 = \overline{A_3 \cup B_3}$, où $A_3$ et $B_3$ sont disjoints,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = 1 - \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(B_3) = 1 - 2p^2q}$$

**3)** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$.

**a)** Auguste vient de gagner la partie, donc le motif « PP » vient d'apparaître.
Supposons que la pièce soit tombée sur « F » à un moment :

$$\{k \in [\![1, n]\!] \,|\, X_k = F\} \neq \emptyset$$

On prend le plus grand indice $m$ de cet ensemble : $X_m = F$ et $X_{m+1} = X_{m+2} = P$ par construction ($m \leqslant n-1$). Donc Bérengère a gagné, ce qui est absurde.
Conclusion : par l'absurde,

$$\boxed{\text{Lors des } n-1 \text{ premiers lancers, la pièce n'est jamais tombée sur « face »}}$$

**b)** Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$A_n = (X_1 = \cdots = X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)$$

Par indépendance mutuelle des $(X_k)_k$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = p^{n-1}q}$$

**4)** **a)** $\boxed{G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n}$

**b)** L'union est disjointe, donc, par propriété d'une probabilité,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q && \text{Car } \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n+2}q \\
&= p^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(G_A) = p^2}$$

**c)** On a l'union disjointe suivante : $\Omega = G_A \cup G_B \cup H$. Or d'après 1.3, $\mathbb{P}(H) = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = 1 - P(G_A) = 1 - p^2}$$

**d)** Pour $p = q = 1/2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G_B) = \frac{3}{4}}$$

**e)** Le jeu est équitable si $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$, c'est-à-dire $p^2 = 1 - p^2$. Comme $p \geqslant 0$, on trouve que

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable si } p = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

## Partie 3 (Temps moyen d'attente)

**1)** De même qu'en 1.2, si le motif n'apparaît jamais, a fortiori il n'apparaît jamais dans un paquet de rang $3n$, donc

$$\boxed{(T_A = +\infty) \subset (T = +\infty)}$$

Par croissance, $\mathbb{P}(T_A = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) = 0$, donc $\mathbb{P}(T_A = +\infty) = 0$.

**2)** Comme on ignore la valeur $+\infty$ (de probabilité nulle),

$$\boxed{T_A(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

*On peut aussi considérer que $T_A(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$.*

De même qu'au 2.1, le motif est de longueur 3, donc ne peut pas apparaître avant le 3e lancé.

$$\boxed{\mathbb{P}(T_A = 1) = \mathbb{P}(T_A = 2) = 0}$$

Au 3e lancer, $(T_A = 3) = (X_1 = P) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = F)$ : par indépendance mutuelle,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_A = 3) = p^2 q}$$

**3)** Le système complet d'événements $\Big((X_n = P), (X_n = F)\Big)$ nous donne

$$u_n = \boxed{\mathbb{P}(T_A > n) = \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = F)\Big) + \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = P)\Big) = v_n + w_n}$$

**4)** Comme $(T_A = 1) = (T_A = 2) = \emptyset$, $(T_A > 1) = (T_A > 2) = \Omega$ et

$$\boxed{u_1 = u_2 = 1}$$

$(\overline{T_A > 3}) = (T_A = 3) = (X_1X_2X_3 = PPF)$ et, par indépendance mutuelle des $(X_n)_n$, $\mathbb{P}(X_1X_2X_3 = PPF) = \mathbb{P}(X_1 = P)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = F)$, donc

$$\boxed{u_3 = 1 - p^2 q}$$

Calcul de $u_4$ : $(T_A = 4) = (X_2X_3X_4 = PPF)$ car la $X_1 = F$ ou $X_1 = F$ ne peut faire apparaître le motif plus tôt. Donc

$$\boxed{u_4 = 1 - \mathbb{P}(T_A = 3) - \mathbb{P}(T_A = 4) = 1 - 2p^2 q}$$

Puis, de même, les valeurs de $X_1$ et $X_2$ ne peuvent pas faire apparaître le motif plus tôt donc $(T_A = 5) = (X_3X_4X_5 = PPF)$ :

$$\boxed{u_4 = 1 - \mathbb{P}(T_A = 3) - \mathbb{P}(T_A = 4) = 1 - 3p^2 q}$$

**5)** Comme $(T_A = 1) = (T_A = 2) = \emptyset$, $(T_A > 1) \cap (X_1 = x) = (X_1 = x)$ pour $x \in \{P, F\}$, et de même pour $n = 2$ :

$$\boxed{v_1 = v_2 = q \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = p}$$

**6)** Soit $n > 3$.

**a)** L'évènement $(T_A > n - 3)$ ne dépend que de $(X_1, \ldots, X_{n-3})$, donc est indépendant d'évènements décrits à l'aide de $X_k$ pour $k > n - 3$, car les $(X_k)_k$ sont mutuellement indépendantes.

**b)** Si $X_n = F$ et que le motif n'apparaît pas en $n$ (ou avant), il y 3 possibilités :

- $\underline{X_{n-1} = F}$ : Le motif n'est pas apparu jusqu'en $n - 1$ inclus : $X_n = F$ ne peut pas provoquer une apparition du motif. Ainsi,

$$(T_A > n) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F) = (T_A > n - 1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)$$

- $\underline{X_{n-1} = P \text{ et } X_{n-2} = F}$ : Le motif n'est pas apparu jusqu'en $n-2$ inclus : la séquence $X_{n-1} = P$, $X_n = F$ ne peut pas provoquer une apparition du motif. Ainsi,

$$\begin{aligned}&(T_A > n) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\\ =&(T_A > n - 2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\end{aligned}$$

- $\underline{X_{n-1} = P \text{ et } X_{n-2} = P}$, mais dans ce cas le motif vient d'apparaître, donc cette possibilité est exclue.

En résumé, nous avons l'union disjointe suivante :

$$\begin{aligned}(T_A > n) \cap (X_n = F) = &\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)\Big] \\ &\cup \Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\Big]\end{aligned}$$

En passant aux probabilités, et en utilisant l'indépendance montrée au 5.a,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = F)\Big) &= \mathbb{P}\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)\Big] \\ &\quad + \mathbb{P}\Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\Big] \\ &= \mathbb{P}\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F)\Big]\mathbb{P}(X_n = F) \\ &\quad + \mathbb{P}\Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F)\Big]\mathbb{P}(X_{n-1} = P)\mathbb{P}(X_n = F) \\ &= qv_{n-1} + pqv_{n-2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}}$$

**c)** Comme $X_n = P$ ne peut pas faire apparaître le motif,

$$(T_A > n) \cap (X_n = P) = (T_A > n-1) \cap (X_n = P)$$

Puis, en passant aux probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[(T_A > n) \cap (X_n = P)\Big] &= \mathbb{P}(T_A > n-1)\mathbb{P}(X_n = P) && \text{D'après 5.a, par indépendance} \\ &= p(v_{n-1} + w_{n-1}) && \text{D'après 3}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{w_n = pw_{n-1} + pv_{n-1}}$$

**7)** Soit $n \geqslant 4$.

$$\begin{aligned}u_n &= v_n + w_n \\ &= qv_{n-1} + pqv_{n-2} + pu_{n-1} && \text{D'après 6b et 6c} \\ &= q(u_{n-1} - w_{n-1}) + pq(u_{n-2} - w_{n-2}) + pu_{n-1} && \text{D'après 3} \\ &= qu_{n-1} - pqu_{n-2} + pqu_{n-2} - p^2qu_{n-3} + pu_{n-1} && \text{D'après 6c} \\ &= u_{n-1} - p^2qu_{n-3} && \text{Car } p + q = 1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad u_n = u_{n-1} - p^2qu_{n-3}}$$

**8)** Étude de la suite $(u_n)$.

**a)** Rappel : avec $\widetilde{X}_{n-2} = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 4, \quad u_{n-2} &= \qquad\qquad u_{n-2} \\ u_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad u_{n-1} \\ u_n &= -p^2qu_{n-3} + 0u_{n-2} + u_{n-1}\end{aligned}$$

Donc, pour $n \geqslant 1$, $\widetilde{X}_{n+1} = A\widetilde{X}_n$ avec

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2q & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

**b)** En réécrivant l'équation $u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q u_n$, il vient

$$\boxed{\chi_A(x) = x^3 - x^2 + p^2 q}$$

Et l'équation caractéristique est $\chi_A(x) = 0$.
Factorisation :

$$\chi_A(p) = p^3 - p^2 + p^2(1-p) = 0$$

Donc $p$ est racine évidente et

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (x-p)(ax^2 + bx + c) \qquad\qquad \text{avec } ax^3 = x^3 \text{ et } -pc = p^2 q \\ &= (x-p)(x^2 + bx - pq) \\ &= (x-p)(x^2 - qx - pq) \end{aligned}$$

Comme $\Delta = q^2 + 4pq > 0$, les racines restantes, distinctes et réelles, sont

$$\boxed{x_1 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

**c)** Les valeurs propres de $A$ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \{p, x_1, x_2\}}$$

avec éventuellement $p$ et $x_1$ ou $p$ et $x_2$ confondues.
*La condition $p = x_1$ (respectivement $p = x_2$) s'écrit sous forme d'une équation polynomiale, donc n'est vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de $p$, ou tout le temps.*
*Pour trouver les valeurs de $p$ délicates, on écrit $p = x_1$, on isole $\sqrt{\Delta}$ d'un coté de l'équation :*

$$3p - 1 = \sqrt{\Delta}$$

*Puis on élève au carré : attention, ce n'est plus une équivalence* a priori*, il faudra vérifier que les $p$ trouvés conviennent. Il vient*

$$(3p-1)^2 = q^2 + 4pq$$

*Qui se simplifie en $(9p-8)p = 0$. Comme $p \neq 0$, il reste*

$$p = 8/9$$

Pour $p$ tel quel $p \notin \{x_1, x_2\}$, $A$ admet trois valeurs propres réelles distinctes : $\chi_A$ est scindé à racines simples.
La matrice $A$ est donc diagonalisable, et le chapitre sur les suites récurrentes linéaires nous donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 p^n}$$

Où $\Lambda = {}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ s'obtient via la matrice de Vandermonde :

$$\widetilde{X}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 p \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 p^2 \\ \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 p^3 \end{pmatrix} = V\Lambda \quad \text{avec} \quad V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & p \\ x_1^2 & x_2^2 & p^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & p^3 \end{pmatrix}$$

Avec $\widetilde{X}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 - p^2 q \end{pmatrix}$, $\Lambda = V^{-1}\widetilde{X}_1$.

**9)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'union disjointe suivante :

$$(T_A \geqslant n) = (T_A = n) \cup (T_A > n)$$

$T_A$ est à valeurs entières ($T_A(\Omega) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$), donc, en posant $u_0 = 1$,

$$u_n = \mathbb{P}(T_A > n) = \mathbb{P}(T_A \geqslant n+1)$$

Puis $\mathbb{P}(T_A > n-1) = \mathbb{P}(T_A = n) + \mathbb{P}(T_A > n)$. Ainsi, $P(T_A = n) = u_{n-1} - u_n$.

**10)** Posons $u_0 = \mathbb{P}(T_A > 0)$. $T_A$ est à valeurs entières, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathbb{P}(T_A > n) = \mathbb{P}(T_A \geqslant n+1)$$

Montrer que $T_A$ admet une espérance revient donc à montrer que la série $\sum u_n$ converge.
Or la suite $(u_n)$ est une combinaison linéaire de suites géométriques. Montrons que chacune d'entre elles convergent :

- Comme $p \in ]0,1[ \subset ]-1,1[$, $\sum p^n$ converge.
- Convergence de $\sum x_1^n$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= q^2 + 4pq \\ &= (q+2p)^2 - 4p^2 \\ &< (q+2p)^2 && \text{Car } p > 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, en remplaçant (la racine carrée est positive)

$$\begin{aligned} 0 < x_1 &= \frac{1}{2}(q + \sqrt{\Delta}) \\ &< \frac{1}{2}(q+q+2p) && \text{Car } q+2p \geqslant 0 \\ &< q+p = 1 \end{aligned}$$

  Par conséquent, $\sum x_1^n$ converge.
- Convergence de $\sum x_2^n$ : Utilisons les relations coefficients - racines :

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = x^2 - qx - pq$$

  Donc $x_1 + x_2 = q \in ]0,1[$, ce qui s'écrit $0 < x_1 + x_2 < 1$, d'où

$$-1 < -x_1 < x_2 < 1 - x_1 < 1$$

  Ainsi $x_2 \in ]-1,1[$ et $\sum x_2^n$ converge absolument.

Conclusion : comme combinaison linéaire de séries absolument convergentes, $\sum u_n$ converge, d'où

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } T_A \text{ est d'espérance finie}}$$

De plus, d'après le théorème du cours,

$$E(T_A) = \sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}(T_A = n) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(T_A \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Or $u_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 p^n$, d'où

$$\boxed{E(T_A) = \frac{\lambda_1}{1-x_1} + \frac{\lambda_2}{1-x_2} + \frac{\lambda_3}{1-p}}$$

**11)** Si $p = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} E(T_A) &= 2\lambda_1 + \frac{4\lambda_2}{3-\sqrt{5}} + \frac{4\lambda_3}{3+\sqrt{5}} \\ &= 2\lambda_1 + \frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}\lambda_2 + \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}\lambda_3 \\ &= 2\lambda_1 + (3+\sqrt{5})\lambda_2 + (3-\sqrt{5})\lambda_3 \end{aligned}$$

**12)**

**13)** Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} u'_n = \mathbb{P}\Big(T_B > n\Big) \\ v'_n = \mathbb{P}\Big((T_B > n) \cap (X_1 = F)\Big) \\ w'_n = \mathbb{P}\Big((T_B > n) \cap (X_1 = P)\Big) \end{cases}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $u'_n = v'_n + w'_n$ et

$$w'_n = \mathbb{P}(X_1 = P)\mathbb{P}_{(X_1=P)}(T_B > n) = \mathbb{P}(X_1 = P)\mathbb{P}(T_B > n-1) = pu'_{n-1}$$

Soit $n \geqslant 3$. Si $X_1 = F$, les débuts de séquences $FF$, $FPF$ et $FPP$ forment un système complet d'événements, sachant que $(X_1 = F, X_2 = P, X_3 = P) \cap (T_B > n) = \emptyset$. Donc

$$\begin{aligned} v'_n &= \mathbb{P}\Big[(X_1 = F, X_2 = F) \cap (T_B > n)\Big] + \mathbb{P}\Big[(X_1 = F, X_2 = P, X_3 = F) \cap (T_B > n)\Big] \\ &= \mathbb{P}(X_1 = F)\mathbb{P}_{(X_1=F)}\Big[(X_2 = F) \cap (T_B > n)\Big] + \mathbb{P}(X_1 = F, X_2 = P)\mathbb{P}_{(X_1=F,X_2=P)}\Big[(X_3 = F) \cap (T_B > n)\Big] \\ &= q\mathbb{P}\Big[(X_1 = F) \cap (T_B > n-1)\Big] + qp\mathbb{P}\Big[(X_1 = F) \cap (T_B > n-2)\Big] \\ &= qv'_{n-1} + pqv'_{n-2} \end{aligned}$$

Remarquons que $u'_n = v'_n + w'_n$, que $u_n = v_n + w_n$, et que les relations de récurrences sont identiques, on trouve la même relation de récurrence pour $u'_n$.
Les trois premiers termes de $(u'_n)$ sont identiques à ceux de $(u_n)$, donc finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = u_n$$

La démarche de la question 9 nous donne finalement

$$\boxed{T_B \text{ suit la même loi que } T_A, \text{ donc } E(T_B) = E(T_A)}$$

Dans un jeu parallèle – où le joueur $A$ lance sa pièce, et le joueur $B$ la sienne – les lois de $T_A$ et $T_B$ sont identique ce qui signifie en particulier que le jeu est parfaitement équilibré.

**Partie 4** (Pierre-papier-ciseaux) **1)** Par symétrie des rôles joués. En posant $P' = F$ et $F' = P$, $G'_B = G_A$ et $G'_A = G_B$. Donc

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{4}$$

**2)** Cas PFF contre PPF : dans cette question, Auguste choisit PFF et Bérengère PPF. En utilisant le système complet d'événements donné par le couple $(X_1, X_2)$, Déterminez $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$.

**3)** Par symétrie des rôles joués, on utilise le résultat de la question précédente.