Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (Urnes de Polya – cas particulier)

1) Il y a $n + 1$ boules lors du n -ième tirage : il y a $u_1 = 2$ boules lors du premier tirage, et à chaque tirage on rajoute 1 boule : $u_{n+1} = 1 + u_n$.

2) • Loi de X_0 : $X_0(\Omega) = \{1\}$ donc $X_0 = 1$, avec $P(X_0 = 1) = 1$.

• Loi de X_1 : $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$, et $\begin{cases} (X_1 = 1) = \overline{A_1} \\ (X_1 = 2) = A_1 \end{cases}$

Or il y a 1 boule noire sur un total de 2 boules dans l'urne lors du premier tirage : $P(A_1) = 1/2$.

Conclusion :

X_1 suit une loi uniforme sur $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$

• Loi de X_2 : $X_2(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, comme $(A_2, \overline{A_2})$ est un système complet d'événements,

$$(X_2 = k) = [(X_2 = k) \cap A_2] \cup [(X_2 = k) \cap \overline{A_2}]$$

Or, si $k = 1$, $[(X_2 = k) \cap A_2] = \emptyset$ et si $k = 3$, $[(X_2 = k) \cap \overline{A_2}] = \emptyset$. Ainsi,

$$(X_2 = 1) = [(X_2 = 1) \cap \overline{A_2}]$$

$$= [(X_1 = 1) \cap \overline{A_2}]$$

Car on n'ajoute pas de boule noire suite au 2e tirage

$$(X_2 = 2) = [(X_2 = 2) \cap A_2] \cup [(X_2 = 2) \cap \overline{A_2}]$$

$$= [(X_1 = 1) \cap A_2] \cup [(X_1 = 2) \cap \overline{A_2}]$$

$$(X_2 = 3) = [(X_2 = 3) \cap A_2]$$

$$= [(X_1 = n + 1) \cap A_2]$$

Car on ajoute une boule noire suite au 2e tirage

En passant à la formule des probabilités composées il vient :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P[(X_1 = 1) \cap \overline{A_2}] \\ &= P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(\overline{A_2}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Car la composition de l'urne au 2e tirage, sachant $(X_1 = 1)$, est $(1N, 2B)$.

De même, la formule des probabilités totales nous donne

$$P(X_2 = 2) = P\left(\left[(X_1 = 1) \cap A_2\right] \cup \left[(X_1 = 2) \cap \overline{A_2}\right]\right)$$

$$= P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(A_2) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(\overline{A_2}) \quad \text{Formule des probabilités totales}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

Urnes : $(1N, 2B)$ ou $(2N, 1B)$

$$= \frac{1}{3}$$

Et finalement,

$$P(X_2 = 3) = P[(X_1 = 2) \cap A_2] = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Conclusion :

$$\boxed{X_2 \text{ suit une loi uniforme sur } X_2(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket}$$

On pouvait aussi déterminer la loi de X_3 , pour se faire une idée du raisonnement à faire pour X_n .

3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : X_n \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 1, n+1 \rrbracket$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie d'après 2). Ainsi que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, d'ailleurs.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, comme $(A_{n+1}, \overline{A_{n+1}})$ est un système complet d'événements,

$$(X_{n+1} = k) = [(X_{n+1} = k) \cap A_{n+1}] \cup [(X_{n+1} = k) \cap \overline{A_{n+1}}]$$

Or, si $k = 1$, $[(X_{n+1} = k) \cap A_{n+1}] = \emptyset$ et si $k = n+2$, $[(X_{n+1} = k) \cap \overline{A_{n+1}}] = \emptyset$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (X_{n+1} = 1) &= [(X_{n+1} = 1) \cap \overline{A_{n+1}}] \\ &= [(X_n = 1) \cap \overline{A_{n+1}}] \\ \forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \quad (X_{n+1} = k) &= [(X_{n+1} = k) \cap A_{n+1}] \cup [(X_{n+1} = k) \cap \overline{A_{n+1}}] \\ &= [(X_n = k-1) \cap A_{n+1}] \cup [(X_n = k) \cap \overline{A_{n+1}}] \\ (X_{n+1} = n+2) &= [(X_{n+1} = n+2) \cap A_{n+1}] \\ &= [(X_n = n+1) \cap A_{n+1}] \end{aligned}$$

En passant à la formule des probabilités composées il vient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P[(X_n = 1) \cap \overline{A_{n+1}}] \\ &= P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Car la composition de l'urne au $(n+1)$ -ème tirage, sachant $(X_n = 1)$, est $(1N, (n+1)B)$.

De même, la formule des probabilités totales nous donne, $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P\left(\left[(X_n = k-1) \cap A_{n+1}\right] \cup \left[(X_n = k) \cap \overline{A_{n+1}}\right]\right) \\ &= P(X_n = k-1)P_{(X_n=k-1)}(A_{n+1}) + P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} \quad \text{Urnes : } ((k-1)N, (n+2-(k-1))B) \text{ ou } (\\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Et finalement,

$$P(X_{n+1} = n+2) = P[(X_n = k) \cap A_{n+1}] = P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(A_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Conclusion, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie :

X_{n+1} suit une loi uniforme sur $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n+2 \rrbracket$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad X_n \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$,

$$\begin{aligned}
 P(A_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_n \cap (X_n = k)) && (X_{n-1} = k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \text{ système complet d'événements} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(A_n) && \text{Formule des probabilités totales} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} \\
 &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k && \text{Or } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2 (E3A PSI 2019)

1) Par définition d'une loi de Poisson, $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc, par construction, $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N} = X_2(\Omega)$.

- Si $k \neq 0$, nous sommes dans le second cas, et $X_2(\omega) = \frac{X_1(\omega)}{2}$. Donc $(X_2 = k) = (X_1 = 2k)$.
Passons aux probabilités :

$$P(X_2 = k) = P(X_1 = 2k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

- Sinon, si $k = 0$, nous sommes dans le premier cas et $X_1 = 0$ ou X_1 est impair :

$$(X_2 = 0) = (X_1 = 0) \cup (X_1 \text{ impair})$$

Par conséquent, comme $(X_1 \text{ impair}) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X_1 = 2k+1)$ (union disjointe),

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = 0) &= P((X_1 = 0) \cup (X_1 \text{ impair})) \\
 &= P(X_1 = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = 2k+1) \\
 &= e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda)
 \end{aligned}$$

Pour les 5/2 uniquement : chapitre suivant

Conclusion :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \mathbb{N}, \quad P(X_2 = 0) = e^{-\lambda}(1 + \text{sh}(\lambda)) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_2 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}}$$

2) Sous réserve de convergence, comme $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$E(X_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_2 = k)$$

Convergence : Ainsi, il faut vérifier que la série de terme général $u_k = ke^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ (pour $k > 0$) converge.

Or

$$k^2 u_k \sim e^{-\lambda} k^3 \lambda^{2k} \left(\frac{e}{2k} \right)^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi 2k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Car, par croissance comparée, tout est négligeable devant $\frac{1}{k^k}$.

On verra au chapitre suivant qu'il vaut mieux utiliser le critère de D'Alembert dans ce genre de cas, et

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)\lambda^{2k+2}(2k)!}{k\lambda^{2k}(2k+2)!} \sim \frac{\lambda^2}{(2k+1)(2k+2)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Donc $u_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument.

Ainsi, X_2 admet une espérance.

Calcul :

$$\begin{aligned} E(X_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$E(X_2) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda)$$

Exercice 3 (Chaîne de Markov)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{A, B, C\}$.

2) Le premier repas est pris au self : $X_0(\Omega) = \{B\}$ et donc $P(X_0 = B) = P(\Omega) = 1$

3) D'après l'énoncé, « Si vous êtes allé au self la veille, la probabilité de manger chez vous est $1/2$. »

$$P(X_{n+1} = A | X_n = B) = \frac{1}{2}$$

4) En traduisant l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

i. $P(X_{n+1} = B|X_n = A) = \frac{1}{2}$, $P(X_{n+1} = C|X_n = A) = \frac{1}{3}$ et $P(X_{n+1} = A|X_n = A) = \frac{1}{6}$.

ii. $P(X_{n+1} = A|X_n = B) = \frac{1}{2}$, $P(X_{n+1} = C|X_n = B) = \frac{1}{4}$ et
 $P(X_{n+1} = B|X_n = B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

iii. $P(X_{n+1} = A|X_n = C) = \frac{1}{3}$, $P(X_{n+1} = B|X_n = C) = \frac{1}{3}$ et $P(X_{n+1} = C|X_n = C) = \frac{1}{3}$.

5) • $P(X_1 = C)$: Comme $\Omega = (X_0 = B)$,

$$(X_1 = C) = (X_1 = C) \cap (X_0 = B)$$

Formule des probabilités composées :

$$P(X_1 = C) = P(X_1 = C|X_0 = B)P(X_0 = B) = \frac{1}{4}$$

• $P(X_2 = C)$: Le système complet d'événements $((X_1 = A), (X_1 = B), (X_1 = C))$ nous donne

$$\begin{aligned} P(X_2 = C) &= P(X_1 = A)P(X_2 = C|X_1 = A) + P(X_1 = B)P(X_2 = C|X_1 = B) \\ &\quad + P(X_1 = C)P(X_2 = C|X_1 = C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \dots \end{aligned}$$

6) La formule des probabilités totales s'écrit, en utilisant le système complet d'événements $(X_n = x)_{x \in X_n(\Omega)}$,

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = A) = P(X_{n+1} = A|X_n = A)P(X_n = A) + P(X_{n+1} = A|X_n = B)P(X_n = B) + P(X_{n+1} = A|X_n = C)P(X_n = C) \\ P(X_{n+1} = B) = P(X_{n+1} = B|X_n = A)P(X_n = A) + P(X_{n+1} = B|X_n = B)P(X_n = B) + P(X_{n+1} = B|X_n = C)P(X_n = C) \\ P(X_{n+1} = C) = P(X_{n+1} = C|X_n = A)P(X_n = A) + P(X_{n+1} = C|X_n = B)P(X_n = B) + P(X_{n+1} = C|X_n = C)P(X_n = C) \end{cases}$$

Ce qui s'écrit $V_{n+1} = MV_n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = A|X_n = A) & P(X_{n+1} = A|X_n = B) & P(X_{n+1} = A|X_n = C) \\ P(X_{n+1} = B|X_n = A) & P(X_{n+1} = B|X_n = B) & P(X_{n+1} = B|X_n = C) \\ P(X_{n+1} = C|X_n = A) & P(X_{n+1} = C|X_n = B) & P(X_{n+1} = C|X_n = C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

On remarque que la somme des colonnes fait 1, donc $(1, 1, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$ de M^T , donc 1 est valeur propre de M . C'est une matrice *stochastique*.

7) Par une récurrence (immédiate, mais à écrire sur la copie vue la question), $V_n = M^n V_0$.