Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (Schmidt)

L'ordre des vecteurs est important dans une base. Et la méthode de Schmidt ne donne pas le même résultat selon l'ordre.

Notons (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de la base de départ, (v_1, v_2, v_3) la famille orthogonale, et (e'_1, e'_2, e'_3) la base orthonormée finale.

1) Base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$:

- Posons $v_1 = e_1$.
  Normons : $\|v_1\|^2 = 1+1+1 = 3$. D'où

$$e'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

- Posons $v_2 = e_2 - \lambda_{21}v_1$ tel que $v_2 \perp v_i$ pour tout $i < 2$.
  C'est-à-dire $v_2 \perp v_1$: $\langle v_2, v_1\rangle = 0 = \langle e_2 - \lambda_{21}v_1, v_1\rangle$
  $= \langle e_2, v_1\rangle - \lambda_{21}\langle v_1, v_1\rangle$

  Donc $\lambda_{21} = \dfrac{\langle e_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$
  $= \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}$
  $= \dfrac{2}{3}$

  Ainsi, $v_2 = e_2 - \lambda_{21}v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

  Normons : $3v_2$ est colinéaire à v_2, et dans la même direction. Au moment de normer, on trouvera le même e'_2 : évitons les fractions. On pourrait d'ailleurs remplacer v_2 par $3v_2$ pour la suite de l'exercice.

  $\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\|^2 = 1+1+4 = 6$, donc

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

- Soit $\lambda_{31}, \lambda_{32} \in \mathbb{R}$ tels que
$$v_3 = e_3 - \lambda_{31} v_1 - \lambda_{32} v_2$$

On veut $v_3 \perp v_1$:
$$\begin{aligned}\langle v_3, v_1\rangle = 0 &= \langle e_3 - \lambda_{31} v_1 - \lambda_{32} v_2, v_1\rangle \\ &= \langle e_3, v_1\rangle - \lambda_{31}\langle v_1, v_1\rangle + 0\end{aligned}$$
Donc $\lambda_{31} = \dfrac{\langle e_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$
$$= \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle}{3} = \frac{1}{3}$$

On veut $v_3 \perp v_2$:
$$\begin{aligned}\langle v_3, v_2\rangle = 0 &= \langle e_3 - \lambda_{31} v_1 - \lambda_{32} v_2, v_2\rangle \\ &= \langle e_3, v_2\rangle + 0 - \lambda_{32}\langle v_2, v_2\rangle\end{aligned}$$
Donc $\lambda_{32} = \dfrac{\langle e_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}$
$$= 3\frac{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\rangle}{6} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $v_3 = e_3 - \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{6}v_2$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6-2-1\\-2-1\\-2+2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
Normons : $\| \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \|^2 = 2$, et
$$e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Conclusion : la base orthonormée cherchée est
$$\mathscr{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

2) Base $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$: Changeons de méthode : Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, $v_k = e_k - p_{k-1}(e_k)$.
Où p_k est la projection orthogonale sur $F_k = \mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1',\ldots,e_k')$.
Comme $(e_1',\ldots,e_k')$ est une base orthonormée de F_k,
$$\forall x \in E, \quad p_k(x) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i'\rangle e_i'$$

- $v_1 = e_1 - 0$ et, comme v_1 est de norme 1,
$$e_1' = e_1$$

- $p_1(e_2) = \langle e_2, e_1'\rangle e_1' = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc $v_2 = e_2 - p_1(e_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Comme v_2 est de norme 1,
$$e_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

- $p_2(e_3) = \langle e_3, e_1'\rangle e_1' + \langle e_3, e_2'\rangle e_2'$
$$= \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$
Donc $v_3 = e_3 - p_2(e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, puis
$$e_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion : la base orthonormée cherchée est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Une famille de polynômes : Polynômes de Laguerre)

1) Cf DL2, exercice 3, question 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^n e^{-t} = 0$ par croissance comparée donc,
$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrales de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc
$$\boxed{I_n(x) \text{ converge}}$$
Montrons que la propriété :
$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n(x) = n!$$
est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$:
$$I_0(x) = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$
Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Intégrons par parties : posons
$$\begin{cases} u = t^{n+1} & u' = (n+1)t^n \\ v = -e^{-t} & v' = e^{-t} \end{cases}$$
Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = \lim_{t\to+\infty} -t^{n+1}e^{-t} = 0$. Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales I_n et I_{n+1} sont de même nature (convergentes d'après ci-dessus), et
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+1} \times \left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)I_n \\ &= (n+1) \times n! && (\mathcal{H}_n) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ I_n = n!}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad (X^i | X^j) = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t}\,\mathrm{d}t = (i+j)!}$$

2) Application : minimiser une intégrale.

a) Utilisons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- Posons $v_0 = 1$.
- Posons $v_1 = X - \lambda v_0$ tel que $(v_1 \mid v_0) = 0$. Or d'après la question 1,

$$(v_1 \mid v_0) = (X \mid 1) = 1$$

Donc $v_1 = X - 1$;

- Posons $v_2 = X^2 - \lambda_0 v_0 - \lambda_1 v_1$ tel que $(v_2 \mid v_i) = 0$ pour tout $i < 2$:

$$\begin{aligned}(v_2 \mid v_0) &= \left(X^2 \mid v_0\right) - \lambda_0 \left(v_0 \mid v_0\right) - \lambda_1 \left(v_1 \mid v_0\right) \\ &= \left(X^2 \mid v_0\right) - \lambda_0 \left(v_0 \mid v_0\right) && \text{Car } v_1 \perp v_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\lambda_0 = \dfrac{(X^2 \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)}$. Et, de même, $\lambda_1 = \dfrac{(X^2 \mid v_1)}{(v_1 \mid v_1)}$.

Or, d'après la question 1,

$$\left.\begin{aligned}\left(X^2 \mid v_0\right) = \left(X^2 \mid 1\right) = 2 \\ (v_0 \mid v_0) = (1 \mid 1) = 1\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_0 = \frac{(X^2 \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)} = 2$$

$$\left.\begin{aligned}\left(X^2 \mid v_1\right) = \left(X^2 \mid X-1\right) = 3! - 2! = 4 \\ \|v_1\|^2 = \|X-1\|^2 = 2! - 2 + 1 = 1\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{(X^2 \mid v_1)}{\|v_1\|^2} = 4$$

Donc $v_2 = X^2 - 4(X-1) - 2 = X^2 - 4X + 2$

Normons la famille orthogonale (v_0, v_1, v_2) :

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2 &= (v_0 \mid v_0) = 1 \\ \|v_1\|^2 &= 1 \\ \|v_2\|^2 &= \|X^2 - 4X + 2\|^2 \\ &= \|X^2\|^2 - 2\left(X^2 \mid 4X\right) + \|4X\|^2 + 2\left(X^2 \mid 2\right) - 2\left(4X \mid 2\right) + \|2\|^2 \\ &= 4! - 8 \times 3! + 16 \times 2! + 4 \times 2! - 16 + 4 \\ &= 4 \times (6 - 12 + 8 + 2 - 4 + 1) = 4 \times 1 = 4\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{B}' = \left(1,\ X-1,\ \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)\right)}$$

b) D'après le cours, si F est un sous-espace vectoriel de E de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$, alors la projection orthogonale p_F sur F s'écrit

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \mid e_i)\, e_i$$

Avec la base $\mathscr{B}'$ de $F = \mathbb{R}_2[X]$, il vient, ,

$$\begin{aligned}\forall P \in E, \qquad p_F(P) &= \sum_{i=0}^{2} (P \mid e'_i)\, e'_i \\ &= (P \mid 1)\, 1 + (P \mid X-1)\,(X-1) + \frac{1}{4}\left(P \mid X^2 - 4X + 2\right)(X^2 - 4X + 2)\end{aligned}$$

Pour $P = X^3$, il faut donc calculer :

$$\begin{aligned}\left(X^3 \mid 1\right) &= 3! = 6 \\ \left(X^3 \mid X - 1\right) &= 4! - 3! = 18 \\ \left(X^3 \mid X^2 - 4X + 2\right) &= 5! - 4 \times 4! + 2 \times 3! \\ &= 6 \times (20 - 16 + 2) = 36\end{aligned}$$

Par conséquent, la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{aligned}p_F(X^3) &= \left(X^3 \mid 1\right) 1 + \left(X^3 \mid X - 1\right)(X-1) + \frac{1}{4}\left(X^3 \mid X^2 - 4X + 2\right)(X^2 - 4X + 2) \\ &= 6 + 18(X-1) + 9(X^2 - 4X + 2) \\ &= 9X^2 - 18X + 6\end{aligned}$$

$$\boxed{p_F(X^3) = 3(3X^2 - 6X + 2)}$$

c) Interprétons algébriquement cette expression :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2$$

Or $P = aX^2 + bX + c$ décrit $\mathbb{R}_2[X]$ lorsque (a, b, c) décrivent $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t &= \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2 \\ &= \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 \\ &= d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 && \text{Par défintion de la distance} \\ &= \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2 \\ &= \|X^3 - 9X^2 + 18X - 6\|^2 && \text{D'après la question précédente} \\ &= \|X^3\|^2 - 18\left(X^3 \mid X^2\right) + 36\left(X^3 \mid X - 6\right) + \|9X^2 - 18X + 6)\|^2 \\ &= \dots \\ &= 36\end{aligned}$$

Les calculs sont peu agréables sur la fin, et ne seraient pas demandés sans assistance numérique. Par contre, un script Python fait très bien le travail.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{B}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ comme sous-famille d'une base.
Or Card $\mathscr{B}_n = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: $\mathscr{B}_n$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Par hypothèse, $P_{n+1} \perp P_i$ pour tout $i < n + 1$.
Donc, par linéarité du produit scalaire, $P_{n+1} \perp \mathrm{Vect}\,(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X]}$$

b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les racines dans $]0, +\infty[$ de P_n, comptées avec multiplicité. Alors

$$P_n = R\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$$

Avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$ qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, R ne change pas de signe sur $]0, +\infty[$. Supposons $R(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.
Posons $Q = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il vient $P_n = RQ$ et

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

avec $R(t)Q^2(t) \geqslant 0$ sur cet intervalle.
Si $\deg Q < \deg P_n$, d'après le a, $(P_n \mid Q) = 0$.
Ainsi, $t \mapsto R(t)(Q(t))^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle.
Le polynôme RQ^2 a une infinité de racines, donc est identiquement nul, et $P_n = RQ = 0$ aussi. Ce qui est absurde.
Par conséquent, $\deg Q = \deg P_n$ et R est une constante : toutes les racines de P_n sont dans $]0, +\infty[$.
Si $R(t) \leqslant 0$ sur $]0, +\infty[$, on considère $(-P_n \mid Q)$ et $-R$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } P_n \text{ sont réelles et dans }]0, +\infty[}$$

c) Si λ est une racine double de P_n, on pose $P_n = (X - \lambda)^2 Q$, avec $\deg Q = \deg P_n - 2 < \deg P_n$. Alors

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} (t - \lambda)^2 Q(t)^2 \, \mathrm{d}t = 0$$

Et donc, de meme qu'à la question précédente, $P_n = 0$, ce qui est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont simples}}$$

Exercice 3 (Matrice de Gram)

1) Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthonormée de E, $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ donc

$$\boxed{G = I_n}$$

Si la famille n'est qu'orthogonale, $\langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2$:

$$\boxed{G = \mathrm{diag}\left(\|u_1\|^2, \dots, \|u_n\|^2\right)}$$

2) Par symétrie du produit scalaire, $\langle u_i, u_j \rangle = \langle u_j, u_i \rangle$, donc

$$\boxed{G \in \mathscr{S}_n(E)}$$

La matrice G est symétrie réelle donc, d'après le théorème spectral,

$$\boxed{G \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée}}$$

3) **a)** Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\boxed{\langle u_i, u_j \rangle = U_i^T U_j}$$

b) Notons $A = (U_1|\cdots|U_n)$ la matrice bloc dont la i-ième colonne est U_i. Alors, $A \in \mathscr{M}_{dn}(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{G = A^T A}$$

c) *Cette question ressemble beaucoup à la question de cours, mais n'est pas exactement la question de cours : A est potentiellement non carrée, dès que $d \neq n$.*

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} X^T G X &= X^T A^T A X \\ &= \|AX\|^2 \geqslant 0 \qquad \text{Norme euclidienne canonique dans } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{G \text{ est symétrique positive.}}$$

Montrons que G est symétrique définie positive si et seulement si la famille $(u_i)_i$ est libre.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons G est symétrique définie positive.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$$

Si on note X le vecteur colonne des λ_i, alors

$$AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i = 0$$

Ainsi $\|AX\|^2 = X^T G X = 0$. Or G est définie positive : $X = 0$.
Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproque : supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ libre.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X^T G X = 0$. Comme

$$X^T G X = \|AX\|^2$$

il vient $AX = 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n x_i U_i = 0$$

Or $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre : pour tout i, $x_i = 0$.
Ainsi, $X = 0$, et donc G est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } G \text{ est symétrique définie positive si et seulement si la famille } (u_1, \ldots, u_n) \text{ est libre}}$$

d) Par définition du rang d'un matrice, $\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{rg}\,(A)$.

L'idée de la preuve, c'est se ramener dans le bon espace, où l'on peut comparer les objets : $\mathrm{Im}\ G \subset \mathbb{R}^n$ *alors que* $\mathrm{Im}\ A \subset \mathbb{R}^d$. *Donc on ne peut,* a priori, *pas les comparer.*
Par contre, en utilisant le théorème du rang, $\mathrm{Ker}\ G$ *et* $\mathrm{Ker}\ A$ *sont des sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *: comparons les !*

Montrons que $\mathrm{Ker}\ G = \mathrm{Ker}\ A$:

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\ G &\Longrightarrow X^T G X = X^T 0 = 0 \\ &\Longrightarrow X^T G X = \|AX\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow X \in \mathrm{Ker}\ A \end{aligned}$$

Donc Ker $G \subset$ Ker A.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker } A &\Longrightarrow GX = A^T AX = A^T 0 = 0 \\ &\Longrightarrow X \in \text{Ker } G \end{aligned}$$

Donc Ker $A \subset$ Ker G.
Ainsi, Ker $G =$ Ker A.
Donc, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(G) &= \dim E - \dim \text{Ker } G \\ &= \dim E - \dim \text{Ker } A \\ &= \text{rg}\,(A) \\ &= \text{rg}\,(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{rg } G = \text{rg}\,(u_1, \dots, u_n)}$$

Exercice 4 (Endomorphismes normaux)

1) $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, donc

$$\boxed{\langle x, y \rangle = X^T Y}$$

2) **a)** Dans la base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= (AX)^T Y \\ &= X^T A^T Y \\ &= X^T (A^T Y) \\ &= \langle x, f^*(y) \rangle \end{aligned}$$

b) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$. Montrons que $g = f^*$.

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

Donc

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x, (g - f^*)(y) \rangle = \langle x, g(y) \rangle - \langle x, f^*(y) \rangle = 0$$

Ainsi, $\forall y \in E$, $(g - f^*)(y) \in E^\perp = \{0\}$: $(g - f^*)(y) = 0$.
Donc $g - f^* = 0$, c'est-à-dire $g = f^*$.
Conclusion :

$$\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle}$$

3) **a)** Dans la base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\forall x \in E, \quad \begin{aligned} \|f(x)\| &= \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle f^*(f(x)), x \rangle && \text{Par définition de } f^* \\ &= \langle f(f^*(x)), x \rangle && \text{Car } f \text{ et } f^* \text{ commutent} \\ &= \langle f^*(x), f^*(x) \rangle && \text{Par définition de } f^* \\ &= \|f^*(x)\| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|}$$

b) Procédons par double inclusion :

$\boxed{\subset}$ $x \in \text{Ker } f \Longrightarrow f(x) = 0$

$\Longrightarrow \|f(x)\| = 0 \quad$ Or $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$

$\Longrightarrow \|f^*(x)\| = 0$

$\Longrightarrow f^*(x) = 0$

$\Longrightarrow x \in \text{Ker } f^*$

Ainsi, $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^*$.

$\boxed{\supset}$ L'application f^{**} a pour matrice $A^{TT} = A$, donc $f^{**} = f$. Ainsi, f^* et $f^{**} = f$ commutent. L'inclusion ci-dessus est vraie pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant f^* et f commutent, donc en particulier pour $g = f^*$ et $g^* = f^{**} = f$:

$$\text{Ker } f^* \subset \text{Ker } f^{**} = \text{Ker } f$$

Conclusion : par double inclusion,

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } f^*}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $g = \lambda \operatorname{id}_E - f$ a pour matrice, dans $\mathscr{B}$, $B = \lambda I_n - A$.
Et g^* a pour matrice $B^T = \lambda I_n - A^T$.
Comme A et A^T commutent, et que I_n commute à toute matrice, B et B^T commutent aussi.
Conclusion :

$$\boxed{\lambda \operatorname{id}_E - f \text{ est un endomorphisme normal}}$$

d) L'endomorphisme $g = \lambda \operatorname{id}_E - f$ est normal d'après c), donc d'après b)

$$\text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f) = \text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f)^*$$

Or $(\lambda \operatorname{id}_E - f)^*$ a pour matrice $(\lambda I_n - A)^T = \lambda I_n - A^T$. Donc, par unicité de g^*, $g^* = \lambda \operatorname{id}_E - f^*$. Ainsi,

$$\text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f) = \text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f^*)$$

Or $\text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f) = E_\lambda(f)$ et $\text{Ker}\,(\lambda \operatorname{id}_E - f^*) = E_\lambda(f^*)$:

$$\boxed{E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}\,(f) &\Longrightarrow E_\lambda(f) \neq \{0\} \\ &\Longrightarrow E_\lambda(f^*) \neq \{0\} && \text{Car } E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*) \\ &\Longrightarrow \lambda \in \text{Sp}\,(f^*) \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{\text{Sp}\,(f) \subset \text{Sp}\,(f^*)}$
L'inclusion réciproque s'obtient en considérant $g = f^*$.

e) Supposons f diagonalisable. Par théorème de diagonalisation,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}\,(f)} E_\lambda$$

Or $f = f^*$ sur chacun de ces E_λ : par linéarité, $f = f*$ sur E.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est diagonalisable, } f \text{ est autoadjoint : } f = f^*}$$

f) Soit $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$.

$$\begin{aligned}
\langle f(x), y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle \\
&= \lambda \langle x, y\rangle \\
\langle f(x), y\rangle &= \langle x, f^*(y)\rangle \\
&= \langle x, \mu y\rangle && \text{Car } E_\mu(f) = E_\mu(f^*) \\
&= \mu \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

D'où $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$,

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E_\lambda(f)$ et tout $y \in E_\mu(f)$, donc

$$\boxed{E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)}$$