Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 16 janvier 2025

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1 (Schmidt)

Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

Exercice 2 (Une famille de polynômes : Polynômes de Laguerre)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$, produit scalaire sur E d'après l'exercice 1 de la feuille de TD sur les espaces euclidiens.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $(X^i|X^j)$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

2) Application : minimiser une intégrale.

- **a)** Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **b)** En déduire la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- **c)** Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

3) Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degrés échelonnés [1].

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.
- **b)** Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]0, +\infty[$.
- **c)** Prouver que ces racines sont simples.

Exercice 3 (Matrice de Gram)

Soit E euclidien de dimension $d \geqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on pose

$$G(u_1, \dots, u_n) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

Cette matrice sera notée G lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

1) Donner une expression simple de G si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthonormée de E, puis si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthogonale de E.

2) Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Montrer que G est symétrique. En déduire que G est diagonalisable.

3) Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, U_i le vecteur colonne de u_i dans la base $\mathscr{B}$.

- **a)** Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $\langle u_i, u_j \rangle$ à l'aide de U_i et U_j.
- **b)** En déduire une expression de G comme produit de deux matrices blocs.
- **c)** En déduire que G est symétrique positive. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que G soit symétrique définie positive.
- **d)** Montrer que $\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}\,(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 4 (Endomorphismes normaux)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\|.\|$.
La transposée d'un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$ est notée X^T et celle d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée A^T.

---

1. Donc $\deg P_n = n$: *par exemple* la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $\langle x, y\rangle$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A^T.

a) Vérifier que l'on a $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On suppose désormais que f et f^* commutent, ce qui équivaut à imposer que A et A^T commutent.

Un tel endomorphisme est appelé endomorphisme normal.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $g \in \mathscr{L}(E)$, on note $E_\lambda(g) = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id}_E - g)$.

a) Montrez, éventuellement à l'aide de calculs matriciels, que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$$

Indication : *Une norme euclidienne se manipule toujours au carré.*

b) En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$.

c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \operatorname{id}_E - f$ est un endomorphisme normal.

d) En déduire que toute valeur propre λ de f est une valeur propre de f^* et $E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)$.

Indication : *Le déduire des deux questions qui précèdent.*

e) Montrer que, si f est diagonalisable, alors $f = f^*$.

f) Soit λ et μ deux valeurs propres réelles distinctes de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)$$