Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = BA$ donc f et g commutent.

- 2) • Étude de f : Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^3$$

On a une matrice diagonale bloc. On peut aussi développer par rapport à la première colonne. Puis calculer le déterminant 2×2 sans plus se compliquer la vie.

Donc 1 est valeur propre triple. Si A est diagonalisable, A serait semblable à $1 \times I_3$ et donc égal à I_3 , ce qui n'est pas le cas. Par conséquent,

A est n'est pas diagonalisable

Par contre le polynôme caractéristique de f est *scindé*, donc

A est trigonalisable

Calcul de $E_1(f)$...après calculs... $E_1(f) = \text{Vect} \left((1, 0, 0), (0, 1, -1) \right)$.

- Étude de g : Polynôme caractéristique de g :

$$\begin{aligned} \chi_g(x) &= \det(x \text{id}_{\mathbb{R}^3} - g) \\ &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ -1 & -x+2 & x-3 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &= x(x-2)^2 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda = 0 & \text{de multiplicité} & \alpha = 1 \\ \lambda = 2 & \text{de multiplicité} & \alpha = 2 \end{cases}$.

Sous-espaces propres : ...après calculs...

$$\boxed{E_0(g) = \text{Ker } g = \text{Vect} \left((2, 1, -1) \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_2(g) = \text{Vect} \left((0, 1, -1) \right)}$$

Comme $\dim E_0(g) + \dim E_2(g) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$,

B est n'est pas diagonalisable

(on pouvait conclure dès que $\dim E_2(g) = 1 < \alpha_2 = 2$).

Par contre le polynôme caractéristique de g est *scindé*, donc

B est trigonalisable

3) Soit $e_1 = (0, 1, -1) \in E_2(g)$ et

$e_2 = (2, 1, -1)$

e_2 n'est pas colinéaire à e_1 car $e_1 \in E_2(g)$ et $e_2 \in E_0(g)$, or $E_\lambda \cup E_\mu = \{0\}$ si $\lambda \neq \mu$. (Il y a beaucoup d'autres arguments : $e_1 \wedge e_2 \neq 0$, $e_2 - e_1 = (2, 0, 0) \neq \lambda e_i$, etc...)

Soit $x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$,

Comme $e_2 = 2(1, 0, 0) + (0, 1, -1) \in E_1(f)$,
et $e_1 \in E_1(f)$ par construction,

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in E_1(f)$$

D'où

$$f(x) = x \in \text{Vect}(e_1, e_2)$$

On a même $\text{Vect}(e_1, e_2) = E_1(f)$ pour des raisons dimensionnelles.

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha g(e_1) + \beta g(e_2) \\ &= 2\alpha e_1 + 0 \times \beta e_2 && (\text{car } e_1 \in E_2(g) \text{ et } e_2 \in E_0(g)) \\ &= 2\alpha e_1 \in \text{Vect}(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(e_1, e_2)$ stable par f et g

4) Posons $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrons que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base : soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det P = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base. De plus

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = e_2 \end{cases} \text{ donc } \text{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ (comme la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et la dernière * en bas vaut 1 : ce n'est pas demandé)}$$

$$\text{De même, } \begin{cases} g(e_1) = 2e_1 \\ g(e_2) = 0 \end{cases} \text{ donc } \text{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ (idem avec 2 au lieu de 1)}$$

Conclusion : $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de trigonalisation commune à f et g

Exercice 2 (Endomorphismes normaux)

1) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, donc

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY$$

2) a) Dans la base orthonormée $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle &= {}^t(AX)Y \\ &= {}^tX{}^tAY \\ &= {}^tX({}^tAY) \\ &= \langle x, f^*(y) \rangle \end{aligned}$$

b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$. Montrons que $g = f^*$.

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

Donc

$$\forall(x, y) \in E^2 \quad \langle x, (g - f^*)(y) \rangle = \langle x, g(y) \rangle - \langle x, f^*(y) \rangle = 0$$

Ainsi, $\forall y \in E, (g - f^*)(y) \in E^\perp = \{0\} : (g - f^*)(y) = 0$.

Donc $g - f^* = 0$, c'est-à-dire $g = f^*$.

Conclusion :

$$\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle}$$

3) a) Dans la base orthonormée $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \|f(x)\| &= \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle f^*(f(x)), x \rangle && \text{Par définition de } f^* \\ &= \langle f(f^*(x)), x \rangle && \text{Car } f \text{ et } f^* \text{ commutent} \\ &= \langle f^*(x), f^*(x) \rangle \\ &= \|f^*(x)\| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|}$$

b) Procédons par double inclusion :

$$\begin{aligned} \boxed{\subset} \quad x \in \text{Ker } f &\implies f(x) = 0 \\ &\implies \|f(x)\| = 0 \quad \text{Or } \|f(x)\| = \|f^*(x)\| \\ &\implies \|f^*(x)\| = 0 \\ &\implies f^*(x) = 0 \\ &\implies x \in \text{Ker } f^* \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^*$.

$\boxed{\supset}$ L'application f^{**} a pour matrice ${}^t t A = A$, donc $f^{**} = f$. Ainsi, f^* et $f^{**} = f$ commutent. L'inclusion ci-dessus est vraie pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant f^* et f commutent, donc en particulier pour $g = f^*$ et $g^* = f^{**} = f$:

$$\text{Ker } f^* \subset \text{Ker } f^{**} = \text{Ker } f$$

Conclusion : par double inclusion,

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } f^*}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $g = \lambda \text{id}_E - f$ a pour matrice, dans $\mathcal{B}$, $B = \lambda I_n - A$.

Et g^* a pour matrice ${}^t B = \lambda I_n - {}^t A$.

Comme A et ${}^t A$ commutent, et que I_n commute à toute matrice, B et ${}^t B$ commutent aussi.

Conclusion :

$$\boxed{\lambda \text{id}_E - f \text{ est un endomorphisme normal}}$$

d) L'endomorphisme $g = \lambda \text{id}_E - f$ est normal d'après c), donc d'après b)

$$\text{Ker } (\lambda \text{id}_E - f) = \text{Ker } (\lambda \text{id}_E - f)^*$$

Or $(\lambda \text{id}_E - f)^*$ a pour matrice ${}^t(\lambda I_n - A) = \lambda I_n - {}^t A$. Donc, par unicité de g^* , $g^* = \lambda \text{id}_E - f^*$. Ainsi,

$$\text{Ker } (\lambda \text{id}_E - f) = \text{Ker } (\lambda \text{id}_E - f^*)$$

Or $\text{Ker}(\lambda \text{id}_E - f) = E_\lambda(f)$ et $\text{Ker}(\lambda \text{id}_E - f^*) = E_\lambda(f^*)$:

$$\boxed{E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\implies E_\lambda(f) \neq \{0\} \\ &\implies E_\lambda(f^*) \neq \{0\} \\ &\implies \lambda \in \text{Sp}(f^*) \end{aligned} \quad \text{Car } E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)$$

Par conséquent $\boxed{\text{Sp}(f) \subset \text{Sp}(f^*)}$

L'inclusion réciproque s'obtient en considérant $g = f^*$.

e) Soit $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$.

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle \\ &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle f(x), y \rangle &= \langle x, f^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \mu y \rangle \\ &= \mu \langle x, y \rangle \end{aligned} \quad \text{Car } E_\mu(f) = E_\mu(f^*)$$

D'où $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E_\lambda(f)$ et tout $y \in E_\mu(f)$, donc

$$\boxed{E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)}$$