Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f et g commutent.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propre de f et g.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?

3) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. Déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\text{Vect}\,(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

4) Construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de trigonalisation commune à f et g.

Plus généralement, si f et g commutent et sont diagonalisables (resp trigonalisables), alors ils sont diagonalisables dans une même base. C'est une conséquence de l'exercice 6 de la feuille d'algèbre linéaire, où l'on a montré que $f \circ g = g \circ f \Longrightarrow g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$.

Exercice 2 (Endomorphismes normaux)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\|.\|$.
La transposée d'un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$ est notée X^T et celle d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée A^T.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $\langle x, y \rangle$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A^T.

- **a)** Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
- **b)** Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On suppose désormais que f et f^* commutent, ce qui équivaut à imposer que A et A^T commutent.
Un tel endomorphisme est appelé endomorphisme normal.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $g \in \mathscr{L}(E)$, on note $E_\lambda(g) = \text{Ker}\,(\lambda\, \text{id}_E - g)$.

- **a)** À l'aide de calculs matriciels, montrez que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$$

  Indication : *Une norme euclidienne se manipule toujours au carré.*
- **b)** En déduire que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$.
- **c)** Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\, \text{id}_E - f$ est un endomorphisme normal.
- **d)** En déduire que toute valeur propre λ de f est une valeur propre de f^* et $E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)$.
  Indication : *Le déduire des deux questions qui précèdent.*
- **e)** Soit λ et μ deux valeurs propres réelles distinctes de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)$$