

Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts, et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
Déterminer $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k)$$

à l'aide des polynômes de Lagrange

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E .

Partie 1

- 1) On suppose que f est diagonalisable. Soit $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, et $u = P(f)$.
 - a) Montrer que f et u commutent.
 - b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f .
- 2) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f . On suppose désormais que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
 - a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
 - b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la dimension de E_{λ_i} , sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?
 - c) En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si e_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i , e_i est également un vecteur propre de g . On notera μ_i la valeur propre associée.
 - d) Les μ_i sont-ils forcément 2 à 2 distincts ?
 - e) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
 - f) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Indication : Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange

Partie 2

Posons

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

Cet ensemble s'appelle le commutant de f .

- 1) Si f admet n valeurs propres distinctes, déterminer $\mathcal{C}(f)$ à l'aide de la partie 1.
- 2) Désormais, f admet 2 valeurs propres distinctes, λ et μ , et f est diagonalisable.
Notons $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation, telle que les k premiers vecteurs sont des vecteurs propres pour λ , et les $n - k$ suivant pour μ . Notons A la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$, et

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

- a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $g \in \mathcal{C}(f) \iff B = \text{Mat}(g, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}(A)$.
- b) Montrer que $B \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si B est diagonale blocs, avec un premier bloc de taille $\dim E_\lambda$ et le second de taille $\dim E_\mu$.
- c) En déduire $\mathcal{C}(f)$.