Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (Centrale MP 2024 – extrait)

1) Montrons que Δ est linéaire : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X)\\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.
$\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $\Delta(P) \in \mathbb{K}[X]$ comme somme de polynômes.
Conclusion :

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])}$$

2) Si P est un polynôme constant, $\Delta(P) = 0$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg(\Delta(P)) \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \deg(P) = n \implies \deg(\Delta(P)) = n-1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\mathcal{H}_1$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \leqslant 1$, donc $P = a_1X + a_0$.

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= a_1(X+1) + a_0 - a_1X - a_0\\ &= a_1\end{aligned}$$

  Donc $\deg(\Delta(P)) \leqslant 0$. De plus, si $\deg(P) = 1$, c'est-à-dire $a_1 \neq 0$, $\deg(\Delta(P)) = 0$.
  Ainsi, $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, donc $P = aX^{n+1} + Q$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $\deg Q \leqslant n$.

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= a(X+1)^{n+1} + Q(X+1) - (aX^{n+1} + Q(X))\\ &= aX^{n+1} + a\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}X^k + Q(X+1) - aX^{n+1} - Q(X)\\ &= a(n+1)X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}X^k + \Delta(Q) \in \mathbb{K}_n[X]\end{aligned}$$

  Supposons $\deg P = n$, c'est-à-dire $a \neq 0$.
  Comme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il vient $\deg(\Delta(Q)) \leqslant n-1$ ($\mathcal{H}_n$), et $R = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}X^k + \Delta(Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  Donc $\deg(\Delta(P)) = n$.
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg(\Delta(P)) \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \deg(P) = n \implies \deg(\Delta(P)) = n-1$

Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, \quad \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1}$$

3) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Nous venons de montrer que, si $P \in \mathbb{K}_d[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
Donc Δ laisse stable $E = \mathbb{K}_d[X]$, et

$$\boxed{\Delta \text{ induit un endomorphisme sur } E = \mathbb{K}_d[X]}$$

4) Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que Ker $\Delta_d = \mathbb{K}_0[X]$:

$\boxed{\subset}$ Soit $P \in$ Ker Δ_d : $\Delta(P) = 0$, c'est-à-dire $P(X+1) = P(X)$. Par récurrence, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X+n) = P(X)$$

Supposons $\deg P > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\alpha+n) = P(\alpha) = 0$$

Donc P a une infinité de racines, ce qui est absurde.
Conclusion, $P \in \mathbb{K}_0[X]$, c'est un polynôme constant. Ainsi

$$\text{Ker } \Delta_d \subset \mathbb{K}_0[X]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $P = a \in \mathbb{K}_0[X]$ un polynôme constant.

$$\Delta_d(P) = a - a = 0$$

Donc $P \in$ Ker Δ_d. Ainsi,

$$\mathbb{K}_0[X] \subset \text{Ker } \Delta_d$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } (\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]}$$

Montrons que Im $\Delta_d = \mathbb{K}_{d-1}[X]$: D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } \Delta_d = \dim \mathbb{K}_d[X] - \dim \text{Ker } \Delta_d = d$$

De plus, d'après la question 2, $\deg(\Delta_d(P)) \leqslant d-1$: $\Delta_d(P) \in K_{d-1}[X]$.
Ainsi, Im $\Delta_d \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
De plus, $\dim \text{Im } \Delta_d = d = \dim \mathbb{K}_{d-1}$.
Donc, par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\text{Im } \Delta_d = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$$

5) Noyau : Soit $P \in$ Ker Δ. En notant $d = \max(\deg(P), 1)$, $P \in$ Ker $\Delta_d = \mathbb{K}_0[X]$ d'après 4. Donc

$$\text{Ker } \Delta \subset \mathbb{K}_0[X]$$

Réciproquement, $\mathbb{K}_0[X] \subset$ Ker Δ. D'où

$$\boxed{\text{Ker } \Delta = \mathbb{K}_0[X]}$$

Image : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et $d = \max(\deg(P), 1)$. D'après 4, $P \in \mathbb{K}_d[X] =$ Im Δ_{d+1}.
Donc il existe $Q \in \mathbb{K}_{d+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \Delta(Q)$. Ce qui entraîne $P \in$ Im Δ.
Ainsi, $\mathbb{K}[X] \subset$ Im Δ. Comme Im Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$,

$$\boxed{\text{Im } \Delta = \mathbb{K}[X]}$$

Soit h une fonction polynomiale, et $H \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme associé. Notons (E'_H) l'équation (dans $\mathbb{K}[X]$)

$$P(X+1) - P(X) = H(X)$$

Cette équation s'écrit $\Delta(P) = H$, et admet une solution, car Δ est surjective : soit P_0 tel que $\Delta(P_0) = H$. De plus,

$$\begin{aligned} P \text{ solution de } E'_H &\iff \Delta(P) = H = \Delta(P_0) \\ &\iff \Delta(P) - \Delta(P_0) = 0 \\ &\iff \Delta(P - P_0) = 0 \\ &\iff P - P_0 \in \text{Ker } \Delta \\ &\iff P \in P_0 + \text{Ker } \Delta \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solution de (E'_H) est

$$\{P_0 + P \mid P \in \text{Ker } \Delta\}$$

On reconnaît « solution particulière (P_0) + solution générale de l'équation homogène ». C'est la méthode de résolution de $f(x) = b$ avec $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Comme Ker $\Delta = \mathbb{K}_0[X]$ d'après 4, les solutions sont $\{P_0 + C \mid C \in \mathbb{K}\}$.
Comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ l'équation

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x+1) - P(x) - h(x) = 0$$

entraîne que $P(X+1) - P(X) - H(X)$ a une infinité de racines, donc est le polynôme nul : $x \mapsto P(x)$ est une solution de (E_h) implique P est une solution de (E'_H). La réciproque est vraie aussi.
D'où l'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) est

$$\boxed{\{x \mapsto P_0(x) + C \mid C \in \mathbb{K}\}}$$

avec P_0 une solution particulière.

6) Soit $P = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) \\ &= a(X^2 + 2X + 1) + bX + b + c - aX^2 - bX - c \\ &= 2aX + a + b \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) = X &\iff 2aX + a + b = X \\ &\iff \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc *une* solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$ est

$$\boxed{P = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X}$$

D'après 5, toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h) sont

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}X + c \mid c \in \mathbb{K}\}}$$

7) Comme Im $\Delta_d = \Delta(\mathbb{K}_d[X]) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$, il vient par récurrence, pour tout $k \in [\![0, d+1]\!]$,

$$\text{Im } \Delta^k = \Delta^k(\mathbb{K}_d[X]) = \mathbb{K}_{d-k}[X]$$

où $\mathbb{K}_{-1}[X] = \{0\}$. Donc

$$\Delta_d^{d+1} = 0$$

D'où Δ_d est nilpotent, et

$$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de } \Delta_d \text{ est } P = X^{d+1}}$$

La seule valeur propre de Δ_d est donc 0, et comme $\Delta_d \neq 0$ $(d > 0)$,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Delta_d \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Exercice 2

1) *Comme toujours, en algèbre, on peut analyser la conclusion :*

$$M = XY^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = \left(y_1X \;\middle|\; y_2X \;\middle|\; y_2X \;\middle|\; \dots \;\middle|\; y_nX \right)$$

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M, on a Im $M = \text{Vect}\,(C_1, \dots, C_n)$. *Cf. Exercice 1 de la feuille matrices. En devoir à la maison, vous devez savoir retrouver cette source.*
Comme $\text{rg}\,(M) = \dim \text{Im } M = 1 > 0$, il existe une colonne non nulle $X = C_{i_0}$, et les C_i sont tous colinéaires à X : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = \lambda_i X$.
Ainsi, en effectuant un calcul par blocs,

$$\begin{aligned} M &= \left(C_1 \;\middle|\; \dots \;\middle|\; C_n \right) \\ &= \left(\lambda_1 X \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \lambda_n X \right) \\ &= X \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= XY^T \qquad \text{où } Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } X \text{ et } Y \text{ des vecteurs colonnes de } \mathbb{R}^n \text{ tels que } M = XY^T}$$

2) Notons $M = (a_{ij})$. Comme $M = XY^T$, $m_{ij} = x_iy_j$ pour tout i, j, et

$$\text{Tr } M = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = X^TY$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Tr } M = X^TY}$$

Autre formulation : Comme $\text{Tr}\,(AB) = \text{Tr}\,(BA)$,

$$\text{Tr}\,(M) = \text{Tr}\,(XY^T) = \text{Tr}\,(Y^TX) = \text{Tr}\,({}^t(Y^TX)) = \text{Tr}\,(X^TY)$$

Or la matrice X^TY *est* 1×1, *donc on identifie* $\text{Tr}\,(X^TY)$ *et* X^TY.

3) Par associativité,

$$\begin{aligned} M^2 &= XY^TXY^T \\ &= X\Big(Y^TX\Big)Y^T \\ &= X\Big(\text{Tr } M\Big)Y^T \\ &= (\text{Tr } M)XY^T \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{M^2 = (\text{Tr } M)M}$$

4) *Toujours penser aux deux points de vue : sous-espaces propres ou polynôme annulateur. On nous demande de déduire le résultat de la question précédente, où nous avons justement calculé un polynôme annulateur.*

Montrons que M est diagonalisable si et seulement si Tr $M \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\lambda = \text{Tr } M \neq 0$.
Ainsi, $P(X) = X^2 - \lambda X = (X - \lambda)X$ est un polynôme scindé à racines simples.
De plus, d'après 3, $P(M) = 0$.
Donc M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples : d'après le théorème de diagonalisation, M est diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Raisonnons par contraposition Supposons Tr $M = 0$.
Alors $M^2 = 0$. La seule valeur propre possible de M est donc 0. Si M est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc $M = 0$
Ce raisonnement est déjà fait dans le cours, dans l'introduction à la réduction. Il faut savoir étudier les matrices nilpotentes.
Or rg $M = 1$, donc $M \neq 0$. Donc, par l'absurde, M n'est pas diagonalisable.
Donc, par contraposition, M diagonalisable implique Tr $M \neq 0$.

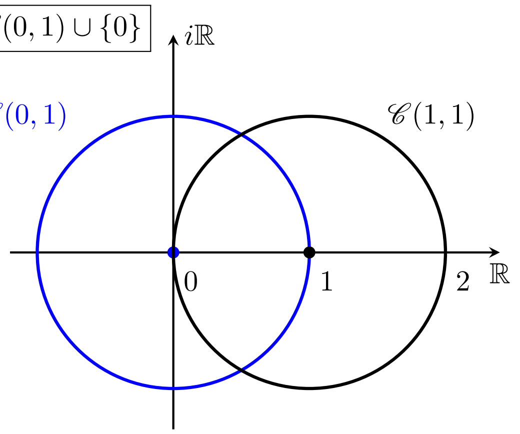
Conclusion,

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est diagonalisable si et seulement si Tr } M \neq 0}$$

Exercice 3 (oral)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Si $P = c$ est un polynôme constant, alors l'équation s'écrit $c = c^2$ et les seules solutions sont $c = 0$ ou $c = 1$.
Supposons désormais $\deg P \geqslant 1$.
Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines (complexes) de P.

- Soit $\alpha \in Z(P)$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$, donc α^2 est aussi une racine de P.
  Par récurrence, α^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Or P a un nombre fini de racines. Donc les α^{2^n} ne peuvent pas être des nombres tous distincts. Une des conséquences est que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
  Si on note $\mathscr{C}(0,1)$ le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}}$
- Soit $\alpha \in Z(P)$.
  Alors $P\Big((\alpha-1)^2\Big) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha-1)^2 \in Z(P)$.
  Or $Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$, donc $(\alpha-1)^2 \in \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$,
  c'est-à-dire $|\alpha - 1| = 1$ ou $(\alpha - 1) = 0$.
  Ainsi, $\alpha \in \mathscr{C}(1,1)$ ou $\alpha = 1$.
  Par conséquent, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}}$



- Ainsi, $\mathbb{Z}(P) \subset \Big(\mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}\Big) \cap \Big(\mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}\Big) = \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
  Si $\alpha = e^{i\pi/3}$, $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} \notin Z(P)$, alors que d'après le premier point $\alpha^2 \in Z(P)$. Par conséquent $e^{i\pi/3}$ est à exclure, et de même $e^{-i\pi/3}$. Il reste donc :
$$\boxed{Z(P) \subset \{0,1\}}$$
- D'après ci-dessus, les seules racines possibles de P sont 0 et 1.
  Donc $P(X) = cX^p(X-1)^q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
  L'équation fonctionnelle s'écrit donc :
$$P(X^2) = cX^{2p}(X^2-1)^q = c^2X^p(X-1)^q(X+1)^pX^q = P(X)P(X+1)$$
  En décomposant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, l'égalité précédente s'écrit :
$$cX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q = c^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p$$
  En identifiant (par unicité de la décomposition en facteurs $(X-\lambda)^\alpha$), il vient $c = 1$, $2p = p+q$, $q = q$ et $q = p$. Donc $P = X^p(X-1)^p$.
  Réciproquement, $P = X^p(X-1)^p$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ vérifiant } P(X^2) = P(X)P(X+1) \text{ sont } P = 0, \text{ et } P = X^p(X-1)^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$

Exercice 4 (Mines-Ponts MP 2024 – extrait)

1 ▷ Notons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M *(i.e. de matrice M dans la base canonique)*.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique et $\mathscr{B}_\rho = (e_{rho(1)}, \ldots, e_{\rho(n)})$ la base où l'on a permuté les vecteurs de $\mathscr{B}$ selon ρ. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_\rho$.
Par définition de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$,
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij}e_i$$
Comme ρ est une bijection, en permutant les indices j il vient
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad f(e_{\rho(j)}) = \sum_{i=1}^n m_{i\rho(j)}e_i$$
Puis en réindexant la somme (permutation des termes) selon ρ ($i = \rho(k)$),
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad f(e_{\rho(j)}) = \sum_{k=1}^n m_{\rho(k)\rho(j)}e_{\rho(k)}$$
Donc, en notant $M_\rho = (m_{\rho(i)\rho(j)})_{ij}$, il vient $M_\rho = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\rho}(f)$. D'où
$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } \Big(m_{\rho(i),\rho(j)}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ sont semblables.}}$$

Et, plus précisément, $M = PM_\rho P^{-1}$.
Notons $\rho = \sigma^{-1} \circ \sigma' \in \mathcal{S}_n$.
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \left(M_{G,\sigma}\right)_{\rho(i),\rho(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(\rho(i)), \sigma(\rho(j))\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Or $\sigma \circ \rho = \sigma'$. Donc
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \left(M_{G,\sigma}\right)_{\rho(i),\rho(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma'(i), \sigma'(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Donc $\left(M_{G,\sigma}\right)_\rho = M_{G,\sigma'}$. Or, d'après ci-dessus, $\left(M_{G,\sigma}\right)_\rho$ est semblable à $M_{G,\sigma}$:

$$\boxed{\text{Si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ sont deux indexations de } S\text{, alors } M_{G,\sigma} \text{ et } M_{G,\sigma'} \text{ sont semblables}}$$

2 ▷ Une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, diagonalisable.
3 ▷ Si le graphe a un seul sommet, il n'y a pas d'arêtes, et $M_{G,\sigma} = (0)$ est de rang 0.
Plus généralement, si le graphe n'a pas d'arête, $M_{G,\sigma} = 0$ et la matrice est de rang 0.
Supposons que le graphe a $n \geqslant 2$ sommets, et qu'il y a une arête de i vers j. Notons C_i et C_j les i-ème et j-ème colonnes de la matrice, montrons que la famille (C_i, C_j) est libre : soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda C_i + \mu C_j = 0$$

Alors, en i-ème et j-ème ligne l'équation précédente s'écrit

$$\begin{cases} \lambda m_{ii} + \mu m_{ij} = \mu = 0 & \text{Car } \{\sigma(i), \sigma(i)\} \notin A \text{ et } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ \lambda m_{ji} + \mu m_{jj} = \lambda = 0 & \text{Car } \{\sigma(j), \sigma(i)\} \in A \text{ et } \{\sigma(j), \sigma(j)\} \notin A \end{cases}$$

D'où la famille est libre, et $\operatorname{rg}(M) \geqslant 2$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1}}$$

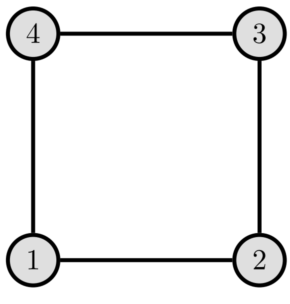
4 ▷ Pour une étoile, $d \neq 0$, donc $n \geqslant 2$. Quitte à permuter les sommets, on peut suppose que le centre de l'étoile est le sommet 1, les sommets reliés au centre sont les sommets 2 à p, et les sommets isolés $p+1$ à n. Alors, par définition d'une étoile,

$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg}(M_{G,\sigma}) = \operatorname{rg}(C_1, C_2)$, les deux premières colonnes, qui ne sont pas colinéaires par le même argument qu'à la question 3.

$$\boxed{\text{Une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoile est de rang 2}}$$

Un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent :



Un graphe de rang 2

$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5 ▷
Si G' est une copie G, notons $\sigma : S' \to S$ la bijection correspondante, et σ_G, $\sigma_{G'}$ des indexations.

Les matrices sont M_{G,σ_G} et $M_{G',\sigma_{G'}}$ sont semblables via la bijection $\rho = \sigma_2 \circ \sigma \circ \sigma_1^{-1}$ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même et la question 1. Donc, d'après l'énoncé, elles ont même polynôme caractéristique :

$$\boxed{chi_G = \chi_{G'}}$$

6 ▷ Dans le polynôme caractéristique, $a_{n-1} = -\operatorname{Tr} M_{G,\sigma}$. Or la diagonale est nulle :

$$\boxed{a_{n-1} = 0}$$

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $M = M_{G,\sigma}$, avec multiplicité, même complexes (on verra que M est symétrique réelle, donc toutes ses valeurs propres sont réelles). Alors $\chi_G(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$. Et, en développant,

$$a_{n-2} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j$$

Or, le développement de $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2$ nous donne

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j$$

De plus, la trace est somme des valeurs propres : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Tr} M = 0$.

Et, en trigonalisant M (on verra que M, symétrique réelle, est même diagonalisable), $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{Tr}(M^2)$.

Calcul de $\operatorname{Tr}(M^2)$: Comme M est symétrique,

$$\operatorname{Tr}(M^2) = \operatorname{Tr}(M^T M) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0^n} m_{ij}^2$$

(on reconnaît le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)
Or les m_{ij} sont nuls sauf si $\{i,j\}$ est une arête, dans ce cas ils valent 1. Et chaque arête $\{i,j\} \in A$ apparaît deux fois (m_{ij} et m_{ji}). Donc

$$\operatorname{Tr}(M^2) = \sum_{\{i,j\} \in A} 2 = 2|A|$$

Conclusion :

$$\boxed{a_{n-2} = |A|}$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geqslant 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

7 ▷ Polynôme caractéristique, valeurs propres :
Soit M la matrice du graphe, avec $n \geqslant 2$. D'après la question 4, $\operatorname{rg}(M) = 2$.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} M = n - 2$. En notant que $E_0 = \operatorname{Ker} M$, il reste donc deux valeurs propres à trouver, que l'on peut noter λ et μ. En utilisant les calculs de la question précédente,

$$\lambda + \mu = \operatorname{Tr} M = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 + \mu^2 = \operatorname{Tr} M^2 = 2|A|$$

Or $|A| = d$, d'où les 2 dernières valeurs propres, $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$. Ainsi,

$$\boxed{\chi_G(x) = x^{n-2}(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = x^n - dx^{n-2}}$$

Valeurs propres :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{0, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\}}$$

Sous-espaces propres : Reprenons la matrice de la question 4.

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} M_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

- Valeurs propres non nulles :

  Soit $\lambda \in \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\}$, et $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Alors $M_d X_\lambda = \begin{pmatrix} d \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda X_\lambda$ car $\lambda^2 = d$.

  D'où $X = \left(\dfrac{X_\lambda}{0}\right) \in \mathbb{R}^n$, non nul, est un vecteur propre de $M_{G,\sigma}$ pour la valeur propre λ.

  Or, d'après la forme du polynôme caractéristique, $\dim E_\lambda = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall \lambda \in \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\}, \quad E_\lambda = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})\,\mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} X_\lambda \\ 0 \end{pmatrix})}$$

- Valeur propre 0 : D'après les calculs précédents (rang), $\dim E_0 = n - 2$.
  Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux,

$$E_0 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} X_{-\sqrt{d}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{\sqrt{d}} \\ 0 \end{pmatrix})^\perp$$

  Un calcul direct est aussi assez rapide, et donne explicitement les vecteurs propres : soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  Les $n-d-1$ vecteurs $e_{d+2}, \dots, e_n$ sont dans E_0, et forment une famille libre (sous-famille d'une famille libre). Il reste $d - 1 \geqslant 0$ vecteurs à trouver.
  Or, pour tout $i \in [\![3, d+1]\!]$, $e_2 - e_i$ est dans E_0. La famille $(e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_{d+1}, e_{d+2}, \dots, e_n)$ est libre (le système associé est triangulaire) , et de cardinal $n - 2 = \dim E_0$, donc c'est une base de E_0 :

$$\boxed{E_0 = \mathrm{Vect}\,(e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_{d+1}, e_{d+2}, \dots, e_n)}$$

8 ▷ *On rappelle que le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ou chaque ligne). On s'en sert lors du calcul du polynôme caractéristique pour sortir les $(x - \lambda)$.*
Mais cela signifie aussi que, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $M = (C_1|\dots|C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et C_1' est une autre colonne, alors

$$\det(\lambda C_1 + C_1'|C_2|\dots|C_n) = \lambda \det(C_1|\dots|C_n) + \det(C_1'|\dots|C_n)$$

On considère une indexation σ de G qui prend d'abord les $n_1 \geqslant 1$ sommets de G_1 (matrice M_1), puis les $n_2 \geqslant 1$ sommets de G_2 (matrice M_2) en mettant s_i en première position dans l'indexation de G_i : s_1 est en 1, et s_2 en $n_1 + 1$. Alors la matrice de G est

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & \begin{matrix} 1 & \\ & (0) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \\ & (0) \end{matrix} & M_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} M_1 & E_{11} \\ E_{11} & M_2 \end{pmatrix}$$

Où E_{ij} est la matrice élémentaire. D'où

$$\chi_G(x) = \det(xI_{n_1+n_2} - M_{G,\sigma}) = \left|\begin{array}{c|c} xI_{n_1}-M_1 & \begin{matrix}-1 & \\ & (0)\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ & (0)\end{matrix} & xI_{n_2}-M_2\end{array}\right| = \begin{vmatrix}\widetilde{M_1} & -E_{11}\\ -E_{11} & \widetilde{M_2}\end{vmatrix}$$

Avec $\widetilde{M_i} = xI_{n_i} - M_i$. En particulier, $\det \widetilde{M_i} = \chi_{G_i}(x)$.
Pour une matrice $M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$, notons M^C la matrice M où l'on a retiré la première colonne, et M^L celle où l'on a retiré la première ligne. Par linéarité du déterminant,

$$\chi_G(x) = \left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M_1} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} & \widetilde{M_2}\end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M_1} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline 0 & \widetilde{M_2}\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_1}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} & \widetilde{M_2}\end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}\widetilde{M_1} & 0\\ 0 & \widetilde{M_2}\end{vmatrix} + \left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M_1} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_2}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix}\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_1}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} & \widetilde{M_2}\end{array}\right|$$

$$= \chi_{G_1}(x)\chi_{G_2}(x) + \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M_1} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_2}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix}\end{array}\right|}_{=D_1} + \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_1}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} & \widetilde{M_2}\end{array}\right|}_{=D_2} + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_1}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix}0 & \\ \vdots & \widetilde{M_2}^C \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix}\end{array}\right|$$

Pour le dernier déterminant, en développant par rapport à la n_1+1-ième colonne, puis par rapport à la première, il vient

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 0 & & -1 & \\ \vdots & \widetilde{M}_1^C & 0 & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & \\ \hline -1 & & 0 & \\ 0 & & \vdots & \widetilde{M}_2^C \\ \vdots & 0 & \vdots & \\ 0 & & 0 & \end{array}\right| = (-1)^{n_1+2}(-1)\left|\begin{array}{cc|c} 0 & & \\ \vdots & \widetilde{M}_1^{CL} & 0 \\ 0 & & \\ \hline -1 & & \\ 0 & & \widetilde{M}_2^C \\ \vdots & 0 & \\ 0 & & \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{n_1+1} \times (-1)^{n_1+1}(-1)\left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M}_1^{CL} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{M}_2^{CL} \end{array}\right| \quad \text{car } M_1^{CL} \text{ a } n_1 - 1 \text{ lignes}$$

$$= -\chi_{G_1\backslash s_1}(x)\chi_{G_2\backslash s_2}(x)$$

De même, en développant D_1 par rapport à la colonne n_1+1, il vient,

$$\begin{aligned}
D_1 &= (-1)^{n_1+3}\left|\begin{array}{c|c} \widetilde{M}_1^{L} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{M}_2^{C} \end{array}\right| && \text{Or les blocs sont rectangulaires} \\
&= (-1)^{n_1+1}\left|\begin{array}{ccc|ccc} & \widetilde{M}_1^{L} & & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \hline & 0 & & & \widetilde{M}_2^{CL} & \end{array}\right| && \text{Avec des blocs diagonaux de taille } n_1 \text{ et } n_2 - 1 \\
&= (-1)^{n_1+1}\left|\begin{array}{ccc} & \widetilde{M}_1^{L} & \\ 0 & \dots & 0 \end{array}\right| \times \left|\widetilde{M}_2^{CL}\right| && \text{Triangulaire bloc} \\
&= 0 && \text{Une ligne de 0 dans un déterminant}
\end{aligned}$$

Le dernier point peut être justifié par : linéarité du déterminant par rapport aux lignes ; ou bien en développant par rapport à la dernière ligne.

De même, $D_2 = 0$. D'où

$$\boxed{\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}}$$

9 ▹ D'après la question précédente, en notant G_i l'étoile à d_i branches et G le graphe étudié,

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$$

Or le polynôme caractéristique d'une étoile à d_i branches, sans sommets isolés ($n = d_i + 1$), est, d'après la question 7,

$$\chi_{G_i}(x) = x^{d_i-1}(x - \sqrt{d_i})(x + \sqrt{d_i}) = x^{d_i-1}(x^2 - d_i)$$

De plus, $G_i\backslash s_i$ est un graphe sans arête, donc de matrice d'adjacence nulle, et de polynome caractéristique x^n avec $n = d_i$ le nombre de sommets. Ainsi,

$$\boxed{\chi_G(x) = x^{d_1+d_2-2}(x^2 - d_1)(x^2 - d_2) - x^{d_1+d_2}}$$

La matrice d'adjacence M est symétrique réelle, donc diagonalisable, ainsi $\dim \operatorname{Ker} M = \dim E_0 = \alpha_0$ multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique.
Or $\chi_G(x) = x^{d_1+d_2-2}Q(x)$ avec $Q(0) = d_1 d_2 \neq 0$. Donc $\alpha_0 = d_1 + d_2 - 2$, et, par le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}(M) = d_1 + d_2 + 2 - (d_1 + d_2 - 2) = 4}$$