Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 12 décembre 2024

# Devoir de Mathématiques numéro 3

---

## Exercice 1 (type Centrale)

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $d$.
- On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Soit $h$ une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction $f$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation $(E_h)$ sur $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathbb{K},\ f(x+1) - f(x) = h(x) \tag{$E_h$}$$

L'exercice étudie l'existence de solutions dans le cas où $h$ est polynomiale.
On considère l'application $\Delta$, l'opérateur différence finie, définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

**Q 1.** Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
**Q 2.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de $P$.
**Q 3.** Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\Delta$ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.
On note $\Delta_d$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par $\Delta$.
**Q 4.** Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta_d)$ et $\operatorname{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.
**Q 5.** En déduire $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation $(E_h)$ dans le cas où $f$ et $h$ sont des fonctions polynomiales.
**Q 6.** On suppose (pour cette question seulement) que $h$ est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de $(E_h)$ dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation $(E_h)$.
**Q 7.** Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme annulateur de $\Delta_d$. L'endomorphisme $\Delta_d$ est-il diagonalisable ?

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

**1)** Montrer qu'il existe $X$ et $Y$ des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ tels que $M = XY^T$.

**2)** Déterminer $\operatorname{Tr} M$ en fonction de $X$ et $Y$.

**3)** Calculer $M^2$ en fonction de $M$.

**4)** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit diagonalisable.

## Exercice 3 (oral)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Indication : *On pourra regarder les racines de $P$. Si $0$ et $1$ sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme $P$ ?*

## **Exercice 4** (type Mines-Ponts)

Dans ce problème, $n$ désigne un entier supérieur à 1 .
On désigne par $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n$.
L'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini $E$ sera noté $\operatorname{Card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** $G$ est un couple $(S,A)$ où :

- $S$ désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe $G$
- $A$ désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe $G$, une arête étant un ensemble $\{s,s'\}$ où $s$ et $s'$ sont des sommets distincts de $S$.
  Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
  Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing,\varnothing)$.
  On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :
- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.
  Par exemple, on a représenté sur la figure 1 , le graphe $G=(S,A)$ avec :

$$S=[\![1,9]\!] \text{ et } A=\{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,9\},\{2,8\}\}$$

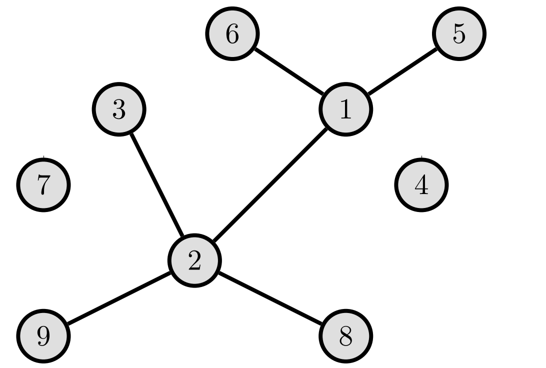


Figure 1- un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.
Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.
Une étoile de centre $s$ et à $d$ branches avec $d$ entier naturel non nul, est un graphe $(S,A)$ où $S=\{s,s_1,s_2,\ldots,s_d\}$ est de cardinal $d+1$, et $A$ est du type

$$A=\{\{s,s_1\},\{s,s_2\},\ldots,\{s,s_d\}\}$$

On a représenté figure 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S=\{1,3,4,5,6,8\}$.

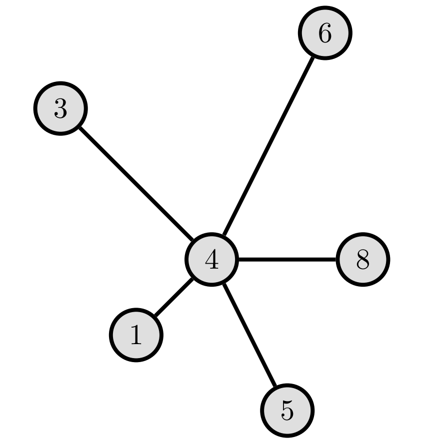


Figure 2 - une étoile à 5 branches

Soient $G=(S,A)$ et $G'=(S',A')$ deux graphes ; on dit que :

- $G'$ est inclus dans $G$ si $S'\subset S$ et $A'\subset A$
- $G'$ est une copie de $G$ s'il existe une bijection $\sigma$ de $S'$ dans $S$ telle que :

$$\forall\left(s',t'\right)\in S'\times S'\quad\left\{s',t'\right\}\in A'\Longleftrightarrow\left\{\sigma\left(s'\right),\sigma\left(t'\right)\right\}\in A$$

Par exemple, le graphe de la figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2 ).
Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.
On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.
Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

### ***Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence***

Soit $G=(S,A)$ un graphe non vide où $|S|=n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à $n$ revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation) $\sigma$ entre $\llbracket 1,n\rrbracket$ et $S$. On pourra alors noter :

$$S=\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index $i$.
Une indexation $\sigma$ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe $G$ associée à $\sigma$ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la $i^{\mathrm{e}}$ ligne et la $j^{\mathrm{e}}$ colonne est :

$$\left(M_{G,\sigma}\right)_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } \{\sigma(i),\sigma(j)\}\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous $i$ et $j$ entiers, $\{i,j\}=\{j,i\}$ ) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).
Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{ id}}$ du graphe $G$ représenté sur la figure 1 :

$$M_{G,\mathrm{id}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Soit $\rho \in \mathcal{S}_n$ une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**1** ▷ Montrer que les matrices $M$ et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si $\sigma$ et $\sigma'$ sont deux indexations de $S$, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

**2** ▷ (5/2) Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable (admis en 3/2).

**3** ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

**4** ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si $\sigma$ et $\sigma'$ sont des indexations de $S$, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer). On notera $\chi_G$ ce polynôme caractéristique commun et on dira que $\chi_G$ **est le polynôme caractéristique du graphe** $G$.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

**5** ▷ Soit $G$ un graphe et $G'$ une copie de $G$. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

**6** ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geqslant 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de $a_{n-1}$ et exprimer $a_{n-2}$ à l'aide de $|A|$.

**7** ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à $n$ sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à $d$ branches avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si $s$ appartient à $S$, on définit le graphe $G\backslash s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S\backslash\{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de $A$ qui ne contiennent pas $s$.

Voici par exemple figure 3 un graphe $G$ et le graphe $G\backslash 2$ :

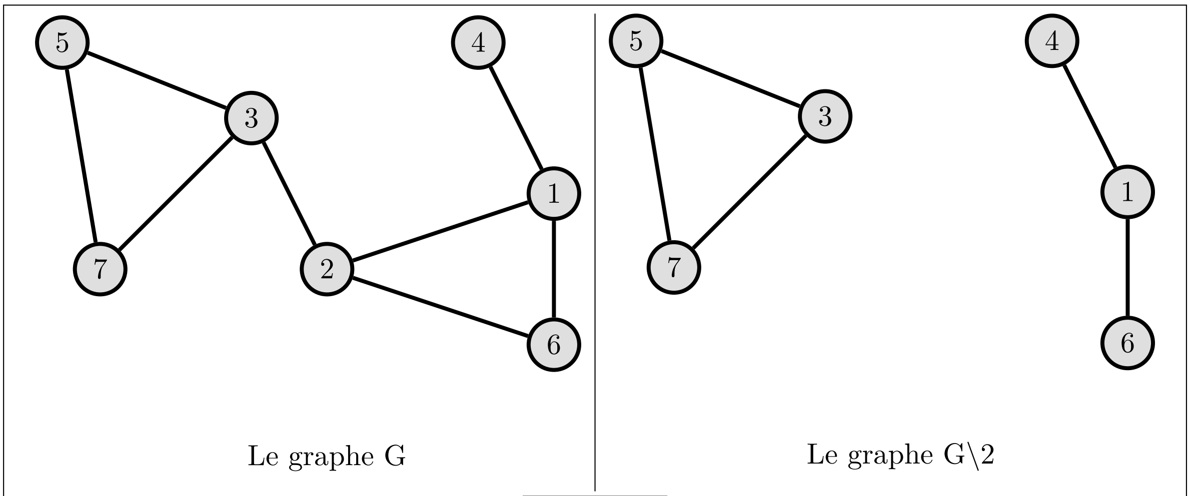


Figure 3

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que $S_1$ et $S_2$ soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$.

**8** ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$$

**9** ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à $d_1$ et $d_2$ branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

*La suite du sujet porte sur des probabilités.*