Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, posons la famille (L_i) des polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par construction, d'après le cours, la décomposition de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$ s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \int_0^1 f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$$

Conclusion, en posant $\alpha_k = \displaystyle\int_0^1 f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k)}$$

Exercice 2

1) *Comme toujours, en algèbre, on peut analyser la conclusion :*

$$M = X^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \ldots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} y_1X & y_2X & y_2X & \ldots & y_nX \end{array}\right)$$

En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice M, on a $\mathrm{Im}\ M = \mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_n)$. *Cf. Exercice 1 de la feuille matrices. En devoir à la maison, vous devez savoir retrouver cette source.*

Comme $\mathrm{rg}\,(M) = \dim \mathrm{Im}\ M = 1 > 0$, il existe une colonne non nulle $X = C_{i_0}$, et les C_i sont tous colinéaires à X : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = \lambda_i X$.

Ainsi, en effectuant un calcul par blocs,

$$\begin{aligned} M &= \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \ldots & C_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1X & \ldots & \lambda_nX \end{array}\right) \\ &= X\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= X^tY \qquad \text{où } Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } X \text{ et } Y \text{ des vecteurs colonnes de } \mathbb{R}^n \text{ tels que } M = X^tY}$$

2) Notons $M = (a_{ij})$. Comme $M = X^tY$, $m_{ij} = x_iy_j$ pour tout i, j, et

$$\text{Tr } M = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = {}^tXY$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Tr } M = {}^tXY}$$

Autre formulation : Comme $\text{Tr}\,(AB) = \text{Tr}\,(BA)$*,*

$$\text{Tr}\,(M) = \text{Tr}\,(X^tY) = \text{Tr}\,({}^tYX) = \text{Tr}\,({}^t({}^tYX)) = \text{Tr}\,({}^tXY)$$

Or la matrice ${}^tXY$ *est* 1×1*, donc on identifie* $\text{Tr}\,({}^tXY)$ *et* ${}^tXY$*.*

3) Par associativité,

$$\begin{aligned} M^2 &= X^tYX^tY \\ &= X\Big({}^tYX\Big){}^tY \\ &= X\Big(\text{ Tr } M\Big){}^tY \\ &= (\text{Tr } M)X^tY \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{M^2 = (\text{Tr } M)M}$$

4) *Toujours penser aux deux points de vue : sous-espaces propres ou polynôme annulateur. On nous demande de déduire le résultat de la question précédente, où nous avons justement calculé un polynôme annulateur.*

Montrons que M est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr } M \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\lambda = \text{Tr } M \neq 0$.
Ainsi, $P(X) = X^2 - \lambda X = (X - \lambda)X$ est un polynôme scindé à racines simples.
De plus, d'après 3, $P(M) = 0$.
Donc M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples : d'après le théorème de diagonalisation, M est diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Raisonnons par contraposition Supposons $\text{Tr } M = 0$.
Alors $M^2 = 0$. La seule valeur propre possible de M est donc 0. Si M est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc $M = 0$

Ce raisonnement est déjà fait dans le cours, dans l'introduction à la réduction. Il faut savoir étudier les matrices nilpotentes.

Or $\text{rg } M = 1$, donc $M \neq 0$. Donc, par l'absurde, M n'est pas diagonalisable.
Donc, par contraposition, M diagonalisable implique $\text{Tr } M \neq 0$.

Conclusion,

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est diagonalisable si et seulement si Tr } M \neq 0}$$

Exercice 3

1) **a)** *C'est aussi du cours, mais il faut savoir le redémontrer.*

$$\begin{aligned}
f \circ u &= f \circ \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i f \circ f^i && \text{par linéarité de } f \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \circ f && \text{car } f \circ f^i = f^{i+1} = f^i \circ f \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right) \circ f && \text{par définition des opérations sur les fonctions} \\
u \circ f
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ et } u \text{ commutent}}$$

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de f, et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice – diagonale – de f dans cette base.
Notons M la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}
M &= P(D) \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i D^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^i \end{pmatrix} && \text{car } D \text{ est diagonale} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_n^i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme la matrice de u est diagonale dans la base $\mathscr{B}$, nous venons de montrer que

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable dans la même base que } f}$$

Les valeurs propres de u sont $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$, donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(u) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)\}}$$

2) **a)** L'espace vectoriel E est de dimension n et f admet n valeurs propres distinctes, donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable}}$$

b) Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} = n$ et $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad \dim E_{\lambda_i} = 1}$$

c) *Appliquons les méthodes habituelles : « pour tout i (...) », donc on fixe : « Soit i (...) ».*
Une implication ? Supposons A, montrons B. C'est la question b) ? Essayons d'écrire le résultat de a).
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, et e_i un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i (donc $e_i \neq 0$).
D'après la question précédente, $\dim E_{\lambda_i} = 1$. Donc

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(e_i)$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(g(e_i)) &= g(f(e_i)) && \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\ &= g(\lambda_i e_i) && \text{car } e_i \in E_{\lambda_i} \\ &= \lambda_i g(e_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$. *(Déjà vu dans les exercices d'algèbre linéaire, et fait en cours dans le cas $\lambda_i = 0$.)*
Or $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(e_i) = \{\mu e_i \mid \mu \in \mathbb{R}\}$: il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. *(cf. le centre de $\mathscr{L}(E)$)*
Ainsi, $e_i \neq 0$ est un vecteur propre de g.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}, \text{ si } e_i \text{ est un vecteur propre de } f,\ e_i \text{ est également un vecteur propre de } g}$$

d) Si $g = \mathrm{id}_E$, on a f et g qui commutent, et $\mu_i = 1$ pour tout i :

$$\boxed{\text{Non, les } \mu_i \text{ ne sont pas forcément 2 à 2 distincts}}$$

e) La famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est libre car c'est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes.
Comme $\dim E = n = \mathrm{Card}\ \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ est une base de E.
D'après c), c'est une base de vecteurs propres de g, donc

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable}}$$

f) Soit P l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \qquad P(\lambda_i) = \mu_i$$

c'est-à-dire, si on note $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ le i-ème polynôme d'interpolation de Lagrange, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$.

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, et D' la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$. Alors

$$\begin{aligned} D' &= \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} && \text{par définition du polynôme } P \\ &= P(D) \end{aligned}$$

Donc, en passant aux endomorphismes,

$$\boxed{g = P(f)}$$