

Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1

1) **a)** Montrons que $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$:

Comme $\mathrm{Im}\,(u) = \{u(x) \mid x \in E\}$, prendre $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ équivaut à prendre $x \in E$ et étudier $u(x)$.

$$\begin{aligned} x \in E &\Longrightarrow (u^2 + \mathrm{id}_E)(u(x)) = u^3(x) + u(x) = 0 \qquad \text{Car } u^3 + u = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)}$$

D'où, en passant aux dimensions,

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}\,(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)}$$

b)

- Montrons que $\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) = \{0\}$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) &\Longrightarrow u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u^2(x) + x = 0 \\ &\Longrightarrow x = -u(u(x)) = -u(0) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) = \{0\}}$.

- Montrons que $\dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) = \dim E$:
D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Im}\,(u)$$

Or, d'après 1)a), $\dim \mathrm{Im}\,(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$. Donc

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Im}\,(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$$

De plus, comme $\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) = \{0\}$,

$$\begin{aligned} \dim \Big[\mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)\Big] &= \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) - \dim \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) \\ &= \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) \end{aligned}$$

Et $\Big[\mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)\Big] \subset E$:

$$\dim \Big[\mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)\Big] \leqslant \dim E$$

D'où

$$\dim E \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) \leqslant \dim E$$

Ainsi, $\underline{\dim \mathrm{Ker}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E) = \dim E}$.

Conclusion :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)}$$

2) **a)** Montrons que $u(F) \subset F$:

$$\begin{aligned} y \in u(\operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)) &\Longrightarrow \exists x \in \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E),\ y = u(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E,\ u^2(x) + x = 0 \quad \text{et} \quad y = u(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E,\ u^2(x) + x = 0 \text{ et } u^2(y) + y = u^2(u(x)) + u(x) = 0 \quad \text{Car } u^3 + u = 0 \\ &\Longrightarrow y \in \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) \end{aligned}$$

Donc $u(F) \subset F$. Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) \text{ est stable par } u}$$

b) Montrons que, pour tout $x \in F$, $v^2(x) = -x$: Soit $x \in F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$: $u^2(x) + x = 0$.

$$\begin{aligned} v^2(x) &= u^2(x) \\ &= -x \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{v^2 = -\operatorname{id}_F}$$

c) Le déterminant est compatible avec la composition et le produit matriciel :

$$\det(v^2) = (\det v)^2 \geqslant 0$$

De plus, $\det(-\operatorname{id}_F) = \det(-I_{\dim F}) = (-1)^{\dim F}$. Ainsi, comme $v^2 = -\operatorname{id}_F$ d'après ci-dessus,

$$\boxed{\dim(F) \text{ est paire}}$$

3) **a)**

- <u>$\dim F$</u> :
  D'après 2)c), $\dim F$ est paire, donc $\dim F = 0$ ou 2.
  Si $\dim F = 0$, d'après 1)b) $\operatorname{Ker} u = E$ et donc $u = 0$. Or nous avons supposé $u \neq 0$.
  Conclusion

$$\boxed{\dim F = 2}$$

- <u>Montrons que (e_2, e_3) est une base de F</u> : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ u(\alpha e_2 + \beta e_3) = u(0) \end{cases} && \textit{Le seul objet fourni par l'énoncé, c'est } u \textit{ : on applique } u. \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ \alpha u(e_2) + \beta u(e_3) = 0 \end{cases} && \text{Or } e_3 = u(e_2) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0 \\ \alpha u(e_2) + \beta u^2(e_2) = 0 \end{cases} && \text{Or, pour } x \in F,\ u^2(x) = -x \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0 \\ -\beta e_2 + \alpha u(e_2) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow -(\alpha^2 + \beta^2) e_2 = 0 && L_2 \leftarrow \beta L_2 - \alpha L_1 \\ &\Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 && \text{Car } e_2 \neq 0 \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Donc (e_2, e_3) est libre.
Or $\operatorname{Card}\{e_2, e_3\} = 2 = \dim F$.
Conclusion :

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } F}$$

b) D'après 1)b), $E = \text{Ker } u \oplus F$, donc en passant aux dimensions $3 = \dim \text{Ker } u + \dim F$.
Par conséquent
$$\boxed{\dim \text{Ker } u = 1}$$
Ainsi, $\text{Ker } u \neq \{0\}$:
$$\boxed{u \text{ n'est pas injectif}}$$

c) (e_1) est une base de $\text{Ker } u$, (e_2, e_3) est une base de F (3)a)) et $E = \text{Ker } u \oplus F$ (1)b)) donc
$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } E.}$$

On a $\begin{cases} u(e_1) &= 0 & (\text{car } e_1 \in \text{Ker } u) \\ u(e_2) &= e_3 & (\text{par définition de } e_3) \\ u(e_3) &= u^2(e_2) = -e_2 & (\text{car } e_2 \in F = \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)) \end{cases}$ Donc

$$\boxed{A = \text{Mat}\,(u, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) La matrice A est diagonale bloc. Étudions le bloc $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$$B^2 = -I_2$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n} = (B^2)^n = (-1)^n I_2$ et $B^{2n+1} = B^{2n}B = (-1)^n B$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A^{2n+1} = (-1)^n A}$

(Comme $u^3 = -u$, on pouvait en déduire sans calculs matriciels que $u^{2n+1} = (-1)^n u$)

4) **a)** Soit $B = \text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où $v \in C(u)$.
La condition $u \circ v = v \circ u$ va s'écrire comme un système linéaire, que l'on résout par équivalences :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} = BA$$
$$\iff \begin{cases} -g &= 0 \\ d &= 0 \\ 0 &= c \\ -h &= f \\ e &= i \\ 0 &= -b \\ -i &= -e \\ f &= -h \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} g &= 0 \\ d &= 0 \\ c &= 0 \\ b &= 0 \\ i &= e \\ h &= -f \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{B \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}}$$

b) L'application $v \mapsto \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc d'après 4a)

$$\dim C(u) = \dim \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} \mid (a, e, f) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Or $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} \mid (a, e, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

La famille trouvée est libre, c'est donc une base de l'espace, et on en déduit la dimension :

$$\boxed{\dim C(u) = 3}$$

c) Les endomorphismes id_E, u et u^2 sont dans $C(u)$: pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$u \circ u^k = u^{k+1} = u^k \circ u$$

Montrons que (I_3, A, A^2) est une famille libre. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bA + cA^2 = 0$.

$$aI_3 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-c & -b \\ 0 & b & a-c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ a-c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $a = b = c = 0$. Donc la famille (id_E, u, u^2) est libre, dans $C(u)$ de dimension 3 (d'après b)).
Conclusion :

$$\boxed{(\mathrm{id}_E, u, u^2) \text{ est une base de } C(u)}$$

Exercice 2 (Centrale – Mines)

1) Si u est nilpotent d'indice 1, alors $u^1 = u = 0$.

$$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul}}$$

2) Comme p est le plus petit entier naturel tel que $u^p = 0$, on a $p = 0$ ou $u^{p-1} \neq 0$.
Or $u^0 = \mathrm{id}_E \neq 0$ (si $\dim E \neq 0$, ce qui est le cas ici), donc $u^{p-1} \neq 0$.
C'est-à-dire, comme $u^p = 0$,

$$\boxed{\text{Il existe } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0 \text{ et } u^p(x) = 0}$$

3) Question de cours : la famille $\mathscr{F} = (u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
Ainsi, $\mathrm{Card}\,(\mathscr{F}) = p \leqslant \dim E$ (on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base, grâce au théorème de la base incomplète).

$$\boxed{p \leqslant n = \dim E}$$

4) *Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

a) D'après 3, $p \leqslant n$ or $p > 1$ et $p \leqslant 2$, donc $p = 2$.

b) *On s'inspire de l'exercice 13 de la feuille d'algèbre linéaire.*
Comme $p - 1 = 1$, considérons $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$.
D'après 3, la famille $(x, u(x))$ est libre, à 2 éléments dans un espace de dimension $n = 2$, donc c'est une base.
Ainsi, posons

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2) = (x, u(x))}$$

Alors

$$u(e_1) = u(x) = e_2$$
$$u(e_2) = u^2(x) = 0 \qquad \text{(car } u \text{ nilpotente d'indice 2)}$$

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, montrons l'équivalence demandée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Montrons que $\underline{(M \text{ nilpotente}) \Longrightarrow (\mathrm{Tr}\,(M) = 0 \text{ et } \det(M) = 0)}$

Soit M une matrice nilpotente. Alors l'endomorphisme $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ canoniquement associé est nilpotent, et $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(M)$, $\det(u) = \det(M)$.
Étudions selon la valeur de l'indice p :

- Si $p = 1$, $u = 0$ donc sa trace et son déterminant sont nuls.
- Si $p = 2$, $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B})) = 0$ et de même $\det(u) = 0$.

D'où

$$(M \text{ nilpotente}) \Longrightarrow (\mathrm{Tr}\,(M) = 0 \text{ et } \det(M) = 0)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Montrons que $\underline{(\mathrm{Tr}\,(M) = 0 \text{ et } \det(M) = 0) \Longrightarrow (M \text{ nilpotente})}$

Posons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice telle que $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ et $\det(M) = 0$:

$$a + d = 0 \qquad \text{et} \qquad ad - bc = 0$$

En élevant au carré on trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\beta = b(a + d) = 0$ et $\gamma = c(a + d) = 0$.

De plus $bc = ad$ donc $\begin{cases} \alpha = a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = 0 \\ \delta = bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = 0 \end{cases}$

Donc $M^2 = 0$. D'où

$$(\mathrm{Tr}\,(M) = 0 \text{ et } \det(M) = 0) \Longrightarrow (M \text{ nilpotente})$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ sont les matrices de trace et de déterminant nuls}}$$

5) *Valeurs propres, trigonalisation.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ une valeur propre complexe de A, et X un vecteur propre associé (donc $X \neq 0$).
Si A est nilpotente d'indice p, alors $A^p X = \lambda^p X = 0$.
Comme $X \neq 0$, $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \{0\}}$$

Nous sommes sur $\mathbb{C}$, donc $\chi_A(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$, avec λ_i les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
Or la seule valeur propre possible est $\lambda = 0$, donc

$$\boxed{\chi_A(x) = x^n}$$

b) Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale telles que
$$A = PDP^{-1}$$
Or $D = 0$ d'après la question précédente, donc $A = 0$.

$$\boxed{\text{La seule matrice de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle}}$$

c) On suppose que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

i) Si $T = (t_{ij})$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle, alors
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,, \qquad i \geqslant j \Longrightarrow t_{ij} = 0$$
Ainsi, par définition de $T = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B})$,
$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{j-1} t_{ij} e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-1})}$$
Pour $i \in]\!] - \infty, n]\!]$, notons $F_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$: si $i < 1$, $F_i = \{0\}$.
Montrons par récurrence que la propriété :
$$\mathcal{H}_k : \qquad \forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u^k(e_j) \in F_{j-k}$$
est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $u^0 = \mathrm{id}_E$ donc, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $u^0(e_j) = e_j \in F_j$.
  Le début de la question montre aussi $\mathcal{H}_1$, ce qui permet de se faire une idée de la propriété à montrer, et sert dans l'hérédité.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie : il existe des (a_{ij}) tels que
$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u^k(e_j) = \sum_{i=1}^{j-k} a_{ij} e_i$$
$$\Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u^{k+1}(e_j) = u\left(\sum_{i=1}^{j-k} a_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{j-k} a_{ij} u(e_i)$$
  Or, pour tout i, $u(e_i) \in F_{i-1}$ d'après le début de la question, et comme, pour tout couple d'entier (p,q), $p \leqslant q \leqslant n$ entraîne $F_p \subset F_q$,
$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u^{k+1}(e_j) = \sum_{i=1}^{j-k} a_{ij} u(e_i) \in F_{j-k-1}$$
  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad u^k(e_j) \in \mathrm{Vect}\,((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant j-k})}$

ii) Pour $k = n$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant j-k} = \{0\}$, donc $u^n(e_j) = 0$ d'après la question précédente.
L'endomorphisme u^n étant nul sur une base, c'est l'endomorphisme nul : $u^n = 0$. Matriciellement, il vient donc $A^n = 0$. Par conséquent,
$$\boxed{A \text{ est nilpotente}}$$

d) Soit A une matrice nilpotente. Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est toujours scindé (ou bien : d'après 5a), donc, d'après le théorème de trigonalisation, A est trigonalisable : Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que
$$A = PTP^{-1}$$
De plus, les termes de la diagonale sont les valeurs propres (calcul immédiat de $\chi_A(x) = \chi_T(x) = \det(xI_n - T)$), et d'après 5a la seule valeur propre est 0, donc T est triangulaire à diagonale nulle :

$$\boxed{\text{une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$$

e) Supposons que 0 soit la seule valeur propre de A : nous sommes sur $\mathbb{C}$, donc 0 est valeur propre d'ordre n et $\chi_A(x) = x^n$. De même qu'en 5d), A donc est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle, et d'après 5c.ii), A est nilpotente.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Si 0 est l'unique valeur propre de } A\text{, alors } A \text{ est nilpotente.}}$$

6) *Réduction des matrices nilpotentes*

a) Comme $\text{Im } u = u(E) \subset E$, $u(\text{Im } u) = u^2(E) \subset u(E) = \text{Im } u$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Im}\,(u) \text{ est stable par } u}$$

On peut aussi le démontrer comme en exercice, $x \in u(\text{Im } u) \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x \in \text{Im } u$.

Comme $u^p = 0$, pour tout $x \in E$, $u^p(x) = 0$, en particulier pour les $x \in \text{Im } u \subset E$:

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit par } u \text{ sur Im}\,(u) \text{ est nilpotent}}$$

Soyons un peu plus précis pour l'indice de nilpotence. Notons v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$.

Soit $y \in \text{Im } u$ et $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $p \geqslant 2 > 0$,

$$u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0$$

Donc $v^{p-1} = 0$.

De plus, $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Soit $x \in E$ un tel élément et $y = u(x)$. Comme $p \geqslant 2$, $u^{p-2}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0$. Donc $v^{p-2} \neq 0$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit par } u \text{ sur Im}\,(u) \text{ est nilpotent d'indice } p-1}$$

b) Soit $x \in E$ non nul fixé.

Soit $y \in \text{Vect}\left(\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$: il existe $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ (avec un nombre fini de $\lambda_k \neq 0$) tels que

$$y = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u^k(x)$$

Donc, par linéarité (la somme est finie, j'insiste) $u(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u^{k+1}(x) \in \text{Vect}\left(\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$

Conclusion :

$$\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u}$$

Comme $u^p = 0$, en particulier $u^p(x) = 0$. Donc l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid u^i(x) = 0\}$ est un ensemble non vide d'entiers naturels : il admet un plus petit élément :

$$\boxed{\text{Il existe un plus petit entier } s(x) \geqslant 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0}$$

$s(x) \geqslant 1$ car $u^0 = \text{id}_E$ donc $x \neq 0$ entraîne $u^0(x) = x \neq 0$.

c) Par construction de $s(x)$, pour tout $k \geqslant s(x)$, $u^k(x) = 0$, donc $\mathscr{F} = (x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x))$ est une famille génératrice de $C_u(x)$.

De plus, d'après 3 (question de cours), la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Conclusion :

$$\boxed{(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)) \text{ est une base de } C_u(x)}$$

Pour tout $k \in [\![1, s(x)-1]\!]$, $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$, avec par définition de $s(x)$, $u(u^{s(x)-1}(x)) = u^{s(x)}(x) = 0$.
Donc la matrice de l'endomorphisme induit v par u sur $C_u(x)$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Montrons par récurrence que la propriété :
$\mathcal{H}_p$: pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et tout $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p, il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.
est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: d'après 1, $u = 0$. En prenant $(x_1, \ldots, x_t) = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$ d'un espace vectoriel E.
  Donc $E' = \mathrm{Im}\ u$ est stable par u (6a), et on considère l'endomorphisme v de E' induit par u : d'après 6a), il est nilpotent d'indice p. Ainsi, en appliquant $\mathcal{H}_p$ à v, il existe $(y_1, \ldots, y_t) \in E'^t$ tels que $\mathrm{Im}\ u = E' = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i)$.
  Chaque $y_i \in \mathrm{Im}\ u$, donc il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$. Soit $(x_1, \ldots, x_t)$ qui conviennent. D'après 3), pour tout i, les familles $(x_i, u(x_i), \ldots, u^{s(y_i)}(x_i))$ sont libres, et bases de $C_u(x_i)$ par construction.
  (...)
  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall p \geqslant 0$, pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et tout $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p, il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

e) Notons A_j la matrice trouvée en c), et $n_i = \dim C_u(x_i)$. Comme chacun des $C_u(x_i)$ est stable par u, la matrice sera diagonale blocs, avec des blocs $A_{n_1}, \ldots, A_{n_t}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{n_t} \end{pmatrix}}$$