

Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u^3 + u = 0$$

1) **a)** Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$. En déduire une minoration de $\dim \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$.

b) Monter que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$.

2) **a)** Montrer que $F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$ est stable par u.

b) On note v la restriction de u à F. Montrer que $v^2 = -\operatorname{id}_F$.

c) En calculant $\det(v^2)$ de deux façons, prouver que $\dim(F)$ est paire.

3) Désormais $\dim E = 3$.

a) Prouver que $\dim F = 2$. Soit e_2 un élément non nul de F. On pose $e_3 = u(e_2)$.
Montrer que (e_2, e_3) est une base de F.

b) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(u)$ et que u n'est pas injectif.

c) Soit e_1 une base de $\operatorname{Ker}(u)$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Quelle est la matrice A de u dans cette base ?

d) Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

4) Soit $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

a) Soit $B = \operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$, où $v \in C(u)$. Déterminer la forme de la matrice B.

b) En déduire la dimension de $C(u)$.

c) Montrer que $(\operatorname{id}_E, u, u^2)$ forme une base de $C(u)$.

Exercice 2 (Centrale – Mines)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \operatorname{id}_E$ et, pour tout entier naturel k ; $u^{k+1} = u \circ u^k$.
On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit de ces entiers est alors appelé indice de nilpotence.
Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

1) Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3) Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p \leqslant n = \dim E$.

4) *Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent non nul.

a) Montrer que $p = 2$.

b) Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

5) *Valeurs propres, trigonalisation.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, si A est est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A. En déduire son polynôme caractéristique χ_A.

b) Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

c) On suppose que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

i) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = T$, matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{j-1})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u^k(e_j) \in \mathrm{Vect}\,((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant j-k})$.

ii) En déduire que A est nilpotente.

d) Montrer la réciproque : une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

e) Montrer que si 0 est l'unique valeur propre de A, alors A est nilpotente.

6) *Réduction des matrices nilpotentes*

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

a) Démontrer que $\mathrm{Im}\,(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\,(u)$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

b) Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$. Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

c) Démontrer que $\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

d) Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

<u>Indication</u> : *on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur* $\mathrm{Im}\,(u)$

e) Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.