Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 13 novembre 2025

Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (Ecricome ECS 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $1 + x^2e^{2t} \geqslant 0$, donc la fonction

$$g : t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}$$

est bien définie sur $[0, +\infty[$. Elle est positive et continue.
Étude en $+\infty$: Si $x \neq 0$, lorsque $t \to +\infty$,

$$g(t) \sim e^{-2t}\sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^{-x}$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (exponentielles, $\beta = 1 > 0$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Pour $x = 0$, $g(t) = e^{-2t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
En conclusion, $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$$

Parité : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + (-x)^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

Valeur en $x = 0$:

$$f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) *Au brouillon, on part du résultat et on essaye de simplifier les formules :*

- *À gauche, $\sqrt{1 + x^2e^{2t}} \geqslant \sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^t$ car $1 + x^2e^{2t} \geqslant x^2e^{2t}$. Puis, au propre, à la façon d'une analyse / synthèse, on renverse la rédaction.*

- *À droite, on suit la même idée : pour obtenir*

$$\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$$

on compare les carrés :

$$1+x^2e^{2t} \leqslant \left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2e^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2}$$

Or, en simplifiant, l'inégalité précédente s'écrit

$$0 \leqslant \frac{e^{-2t}}{4x^2}$$

Et il ne reste plus qu'à tout renverser pour rédiger au propre.

Soit $(x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1 &\Longrightarrow x^2e^{2t} \leqslant 1+x^2e^{2t} \\ &\Longrightarrow |x|e^t = \sqrt{x^2e^{2t}} \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} && \text{Car la racine carrée est croissante} \\ &\Longrightarrow xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} && \text{Car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{e^{-2t}}{4x^2} &\Longrightarrow 1+x^2e^{2t} \leqslant x^2e^{2t}+1+\frac{e^{-2t}}{4x^2} = \left(xe^t+\frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x} && \text{Par croissance de la racine} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}}$$

b) Soit $x > 0$. D'après 2b,

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad xe^{-t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}$$

Par le critère des exponentielles le membre de droite est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc par théorème de majoration tous les membres le sont. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}$ pour $\beta > 0$, d'où, finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{1}{6x} \xrightarrow[x\to+\infty]{}$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote d'équation } y = x \text{ au voisinage de } +\infty}$$

3) Soit $D = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad h(x,t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$$

Majorer $|h(x,t)|$ ou $|\partial h/\partial x(x,t)|$ pour $x \in \mathbb{R}$ est sans espoir. Il faut se placer sur $[-a,a]$, avec $a > 0$. Et la majoration n'est pas évidente : je propose de la rédiger avant de se lancer dans le théorème.

Préliminaires : Soit $a > 0$ fixé. Soit $t \in I$. Majorons $|g(x)|$ où

$$\forall x \in [-a,a], \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$$

La fonction g est impaire et dérivable sur $[-a,a]$, avec

$$g'(x) = \frac{1}{(1 + x^2 e^{2t})^{3/2}} > 0$$

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0		a
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$g(a)$

Ce tableau (et la parité de g) nous prouve que

$$\forall (x,t) \in [-a,a] \times \mathbb{R}_+ \qquad \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}} \right| = |g(x)| \leqslant g(a) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 e^{2t}}}$$

De plus, pour t au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2 e^{2t}}} \sim e^{-t}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 e^{2t}}}\, \mathrm{d}t$ converge.

Théorème de dérivation :

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$ est continue (donc continue par morceaux) sur I.
- Soit $a > 0$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2 e^{2t}}}$. D'après les préliminaires, la fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+$ et,

$$\forall (x,t) \in [-a,a] \times I, \qquad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}} \right| \leqslant \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 e^{2t}}} = \varphi(t)$$

Cette majoration sur tout segment de $D = \mathbb{R}$ nous donne, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz),

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D \text{ et } f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}\, \mathrm{d}t.}$$

La dérivée f' est du signe de f donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme la fonction f est $\mathscr{C}^1$, elle est en particulier $\mathscr{C}^0$.

4) a) Soit $x > 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto xe^t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($x > 0$) et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[x, +\infty[$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = xe^t$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \boxed{x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u} \end{aligned}$$

De même $\boxed{f'(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u}$.

b) En dérivant l'expression obtenue au 4)a) pour $x > 0$, il vient

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} \\ &= \frac{2}{x}f(x) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation différentielle } xy' - 2y = -\sqrt{1+x^2}.}$
Cette équation reste valable en $x = 0$.

c) La fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

<u>En 0</u>, $\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \sim u\ln u \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ donc est prolongeable par continuité, donc intégrable.

<u>En $+\infty$</u>, $u^{1,5}\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{\ln u}{u^{0,5}} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ donc à partir d'un certain t_0, $\left|u^{1,5}\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant 1$ donc

$$\left|\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{u^{1,5}}$$

Le majorant étant intégrable d'après Riemann, la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \sim \dfrac{1}{u^2}$ donc est intégrable. Soit $x > 0$ et $A > x$.

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{1}{u}\times\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \sim \dfrac{\ln A}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et toutes les fonctions sont intégrable, donc lorsque $A \to +\infty$

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u}$$

On peut aussi appliquer directement le théorème d'intégration par parties, qui nous donne la convergence des deux intégrales, après avoir prouvé la convergence du crochet $[uv]$. Comme les fonctions sont positives (au moins sur $[1, +\infty[$), la convergence est absolue : on a prouvé que les fonctions sont intégrables.

d) La fonction $u \mapsto \dfrac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\, du$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\, du \xrightarrow[x\to 0]{} I$, ce qui s'écrit aussi

$$\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\, du = I + o(1)$$

Ainsi, en combinant l'expression de f' trouvée en 4)a) et l'égalité obtenue en 4)c), il vient

$$f'(x) = -\frac{x \ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + xI + o(x)$$

Donc $\dfrac{f'(x)}{-x \ln x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{I}{\ln x} + o(\dfrac{1}{\ln x}) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, ce qui signifie

$$\boxed{f'(x) \sim -x \ln x}$$

Les petits o s'intègrent : $f'(x) = -x \ln x + o(-x \ln x)$ donc

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x u \ln u\, du + o(\int_0^x u \ln u\, du)$$

Or $\displaystyle\int_0^x u \ln u\, du = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1/2) \sim \frac{x^2}{2} \ln x$. D'où $\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \sim \frac{x^2}{2} \ln x.}$