

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1 (Ecricone ECS 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} dt$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f .

2) Branche infinie de $\mathcal{C}_f$:

a) Montrer que $\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad x e^t \leq \sqrt{1+x^2 e^{2t}} \leq x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x > 0, x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) a) Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = x e^t$, déterminer une nouvelle expression de f . Faire de même pour f' .

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ et que la fonction $u \mapsto \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \frac{1}{2}$ au voisinage de 0.