Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le mercredi 13 novembre 2024

Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – d'après Centrale PC 2018, E3A PC 2017)

C'est un sujet extrêmement classique, et donc une fonction à connaître.

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (Séries de Riemann). Donc

$$\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[}$$

On vient donc de montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur D_ζ.

b) Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 1$, $f_n(x) = e^{-x \ln n}$, d'où le tableau de variations :

x	1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|$	$-$	
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$.

Conclusion : Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après Riemann, $\alpha = 1$), $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement } D_\zeta}$$

c) *Sur votre copie, vous ne faites pas un second tableau de variations : vous rajoutez a et $f_n(a)$ dans le tableau précédent.*

Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Calculons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)|$ à l'aide du tableau de variations précédent :

x	1		a		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|$		$-$		
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\frac{1}{n^a}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$.
Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (d'après Riemann, $a > 1$).
Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[}$$

d) D'après 1c, $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de D_ζ avec $a > 1$, donc sur tout segment de D_ζ.
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur D_ζ.
Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } D_\zeta}$$

2) Variations de ζ.

a) Une fonction f est dite croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Une fonction f est dite décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

b) Soit $(x, y) \in D_\zeta^2$, tels que $x \leqslant y$. Comme f_n est décroissante (cf 1b) pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \geqslant f_n(y)$$

En sommant et en passant à la limite, il vient,

$$\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$$

D'où

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

c) La fonction ζ est positive car $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Or elle est décroissante d'après 2b, donc

$$\boxed{\zeta \text{ admet une limite en } +\infty}$$

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1[$, car $x > 0$, donc

$$\forall t \in [n, n+1[, \qquad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

Pour $n \geqslant 2$, l'inégalité de gauche peut s'écrire

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}}$$

Ici, on fait le décalage d'indices avant *de sommer.*

ii) Soit $x \in D_\zeta$.

D'après Riemann ($x>1$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ converge et, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.

D'après Chasles,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

En intégrant à partir de $t=2$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

En sommant l'encadrement de la question 3(a)i entre 2 et N, il vient

$$\forall N \geqslant 2, \qquad \sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

Toutes ces sommes convergent d'après ci-dessus, ainsi

$$\begin{array}{rcccccc} & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \\ \Longrightarrow & \displaystyle\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} & \leqslant & \zeta(x)-1 & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{x-1} \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in D_\zeta, \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}}$$

b) Étude au voisinage de $x=1$.

i) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, par minoration (3(a)ii),

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) \text{ existe et vaut } +\infty}$$

ii) Utilisons l'encadrement de la question 3(a)ii : comme $x-1>0$,

$$\forall x \in D_\zeta, \quad x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1} x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} = \lim_{x\to 1} x = 1$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)\zeta(x) = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}}$$

c) D'après l'encadrement de la question 3(a)ii, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$$

4) Fonction de Dirichlet.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1}{n^x}$ est positive, décroissante et de limite nulle ($x>0$). Donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

b) Soit $x > 0$. D'après le critère des séries alternées, la limite $\ell = F(x)$ est encadrée entre U_{2n} et U_{2n+1}, où $U_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$.
Pour $n = 1$, il vient
$$U_2 \leqslant F(x) \leqslant U_3$$
C'est-à-dire
$$\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
D'après le critère des séries alternées, le reste $R_n = \sum_{k=n+1} (-1)^{k-1}a_k$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, a_{n+1} :
$$\begin{array}{lll} & \forall x \in [a,+\infty[, & \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)\right| = |R_n| \leqslant f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)^x} \\ \Longrightarrow & \forall x \in [a,+\infty[, & \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(par décroissance de } f_{n+1}\text{)} \\ \Longrightarrow & & \|\zeta - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(en passant au sup)} \end{array}$$
Conclusion : Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$ ($a > 0$), par majoration, $\lim_{n\to+\infty} \|\zeta - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k\|_\infty = 0$ et
$$\boxed{\sum(-1)^{n-1}f_n \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[}$$

On a convergence normale pour $a > 1$, mais pour $a \in]0,1]$ il n'y a pas convergence normale, cf 1b et 1c.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1}f_n$ est continue (car f_n l'est) sur $[a,+\infty[$, et $\sum(-1)^{n-1}f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, F est continue sur $[a,+\infty[$.
Ceci est valable pour tout $a > 0$, donc sur $\bigcup_{a>0}[a,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$:
$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

C'est une autre façon de rédiger la question. On pouvait évidemment rédiger comme au 1d, et vice-versa.

e) Soit $x > 1$,
$$\begin{aligned} \zeta(x) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x} \qquad \text{Or } \begin{cases} 1+(-1)^n = 0 \text{ si } n = 2k+1 \text{ impair} \\ 1+(-1)^n = 2 \text{ si } n = 2k \text{ pair} \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} \\ &= \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)}$$

f) D'après la question précédente, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} & (1-2^{1-x})\zeta(x) = F(x) \\ \Longrightarrow \quad & \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} F(x) \\ & = (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \quad \left(\text{car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \text{ et } 2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right) \end{aligned}$$

Or, d'après 4b,

$$0 \leqslant 2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\right] \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc, par encadrement, $2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\right] = o(1)$, puis

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right) \qquad \left(\text{car } 2^{1-x} = \frac{1}{2^{x-1}} = 2 \times \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^x} - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)}$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in D_\zeta$, $f_n(x) = n^{-x} = e^{-(\ln n)x}$ donc f_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur D_ζ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-(\ln n)x} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}}$$

b) Question de cours. Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$ et $\alpha = \dfrac{x+1}{2} > 1$.

$$\begin{aligned} n^\alpha |u_n| &= (\ln n)^k n^{\alpha - x} & \text{Or } \alpha - x = \frac{1-x}{2} < 0 \\ &= (\ln n)^k n^{\frac{1-x}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 & \text{par croissance comparée} \end{aligned}$$

Donc $n^\alpha |u_n| = o(1)$, puis $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann, $\alpha > 1$).
Donc par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \text{ est convergente}}$$

c) *Lors d'une question « à tiroirs » de ce type, il faut bien structurer sa réponse. Ici, vous allez appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Pour ça, vous avez besoin de la convergence uniforme de la série des dérivées, qui n'a pas été montrée plus haut. Pour ça, vous allez sans doute montrer la convergence normale de* $\sum f_n'$*...*
Structurez !

- Convergence normale de $\sum f_n'$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé,

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad |f_n'(x)|=\frac{\ln n}{n^x}$$

Donc, d'après l'étude effectuée au 1c, $\|f_n'\|_\infty=\dfrac{\ln n}{n^a}$.

Or, d'après 5b avec $k=1$, $\sum\dfrac{\ln n}{n^a}$ converge, donc

$$\sum f_n' \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Soit $1<a<b$.

D'après ci-dessus, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc normalement sur $[a,b]$, donc uniformément sur $[a,b]$.

Ainsi, $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_ζ.
  - $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur D_ζ d'après 1)a).
  - $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall x\in D_\zeta,\ \zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}}$$

- Variations de ζ sur D_ζ : $\forall x\in D_\zeta$, $\zeta'(x)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}<0$ donc

$$\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

d) Montrons que ζ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, par la même méthode qu'à la question précédente. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

- Convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, d'après a),

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad |f_n^{(k)}(x)|=\frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Donc, d'après 1c, $\|f_n^{(k)}\|_\infty=\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ et comme d'après 5b , $\sum\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge,

$$\sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Comme lors de la question c), $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]1,+\infty[$, donc uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.
- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ.
  - Pour tout $i\in[\![0,k-1]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur D_ζ d'après 5b.
  - $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme ($\mathscr{C}^k$) des séries de fonctions,

$$\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall i\in[\![0,k]\!],\ \forall x\in D_\zeta,\ \zeta^{(i)}(x)=(-1)^i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^i n}{n^x}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}}$$

Exercice 2 (Théorème de Stone-Weierstrass – d'après Mines-Ponts PSI 2019)

1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme s'écrit :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Donc, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1}$$

2) On dérive par rapport à $x \in \mathbb{R}$, et à $y \in \mathbb{R}$ fixé, la formule du binôme :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}$$

Puis on multiplie par x :

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1}$$

Soit $x \in [0,1]$ et en posant $y = 1 - x$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx}$$

3) On reprend la formule (1), et on dérive de nouveau par rapport à x puis on multiplie par x :

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ainsi, de même, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2}$$

4) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2knx + n^2x^2\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} -2knx \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} n^2x^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or, d'après 3, 2 et 1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx + n(n-1)x^2 = nx + n^2x^2 - nx^2 \\
\sum_{k=0}^{n} -2knx \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= -2nx \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= -2(nx)^2 \\
\sum_{k=0}^{n} n^2x^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n^2x^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx + n^2x^2 - nx^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\
&= n(x - x^2)
\end{aligned}$$

Posons $h(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, et calculons $\|h\|_\infty$: $h'(x) = 1 - 2x$ et

x	0		$1/2$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Donc $\|h\|_\infty = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $x - x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}}$$

5) *La propriété donnée par l'énoncé s'appelle l'uniforme continuité et toute fonction continue sur un segment est automatiquement uniformément continue. Cette propriété sert lors de la construction de l'intégrale d'une fonction continue à partir des fonctions en escalier.*

Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après 1, en multipliant par $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x)$$

De plus, par définition de $B_n(x)$,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc en soustrayant, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\boxed{|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}$$

6) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par construction $[\![0,n]\!] = X \cup Y$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| = \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

<u>Somme sur X</u> : Soit $k \in X$.
Par construction de X, $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha$ Comme f est uniformément continue (propriété (1) de l'énoncé),

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon$$

Puis, en combinant (tous les coefficients sont positifs) :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| &\leqslant \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon \end{aligned}$$

<u>Somme sur Y</u> : Soit $k \in Y$. $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$.
En conclusion,

$$\boxed{|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

7) *L'énoncé nous dit d'utiliser les questions précédentes. Donc : utilisons le fait que $k \in Y$ pour faire apparaître les formules précédentes. Et voyons ce qui arrive...*
Si $k \in Y$, par définition, $1 \leqslant \frac{1}{\alpha} \left| x - \frac{k}{n} \right|$, puis $1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2$. Donc

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k \in Y} \frac{1}{\alpha^2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Ainsi,

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On suppose $f \neq 0$, donc $\|f\|_\infty \neq 0$. D'après la question 4,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

Comme les termes de la somme sont positifs,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in [\![0,n]\!]} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4\alpha^2 n} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4\alpha^2 n} = 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{4\alpha^2 n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$.
En utilisant cette majoration dans l'inégalité trouvée à la question 6, il vient

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0,1], \qquad |B_n(x) - f(x)| &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout $x \in [0,1]$, on peut passer au sup :

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad \|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon}$$

8) Si $f = 0$, la suite constante égale à 0 est une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément vers f.
Si $f \neq 0$, on construit les (B_n), fonctions polynomiales, comme ci-dessus. On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad \|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|B_n - f\|_\infty = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Toute fonction continue sur } [0,1] \text{ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales}}$$

Si on considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on peut le munir d'une distance à l'aide de la norme infinie : la distance entre f et g est $\|f-g\|_\infty$. On vient de montrer que les fonctions polynomiales sont arbitrairement proches de toutes les fonctions continues. On dit que les fonctions polynomiales sont « denses » dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.
Ce résultat permet de montrer certains résultats en passant par les polynômes, puis en les « passant à la limite ».

Exercice 3 (Transformée de Laplace – D'après CCINP PC 2023, E3A PC 2010, et autres)

1) Soit $n \geqslant 0$ un entier, $f : t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
De plus $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^n e^{-xt} = 0$ par croissance comparée donc,

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrales de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc

$$\boxed{I_n(x) \text{ converge}}$$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$:

$$I_0(x) = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x^{0+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Intégrons par parties : posons

$$\begin{cases} u = t^{n+1} & u' = (n+1)t^n \\ v = -\dfrac{1}{x}e^{-xt} & v' = e^{-xt} \end{cases}$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} uv = \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{1}{x}t^{n+1}e^{-xt} = 0$. Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$ sont de même nature (convergentes d'après ci-dessus), et

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+1} \times \frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n\frac{e^{-xt}}{-x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{x}I_n(x) \\ &= \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} && (\mathcal{H}_n) \\ &= \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

2) a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$:

Appartenir à E, c'est trouver A, C et n tels que (etc...) : à chaque fois, pour montrer « ∈ E », il faut expliciter A, C et n.

- Montrons que la fonction nulle est dans E :
  Pour tout $t \geqslant 1$, $|0| \leqslant 1$ donc $0 \in E$ avec $A = 1$, $C = 1$ et $n = 0$. Ainsi $\underline{E \neq \emptyset}$. *(Important !)*
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f_1, f_2 \in E^2$, avec A_1, A_2, C_1, C_2, n_1 et n_2 les constantes associées.
  Posons
  ▷ $A = \max(A_1, A_2, 1) > 0$
  ▷ $C = |\lambda|C_1 + C_2 > 0$
  ▷ $n = \max(n_1, n_2)$

  Pour tout $t \geqslant A = \max(A_1, A_2, 1)$,

$$\begin{aligned} |\lambda f_1(t) + f_2(t)| &\leqslant |\lambda||f_1(t)| + |f_2(t)| \\ &\leqslant |\lambda|C_1t^{n_1} + C_2t^{n_2} \\ &\leqslant |\lambda|C_1t^n + C_2t^n \\ &\leqslant Ct^n \end{aligned}$$

  De plus $\lambda f_1 + f_2$ est continue. Ainsi $\lambda f_1 + f_2 \in E$.

Par conséquent

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})}$$

b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Notons $C = \|f\|_\infty + 1 > 0$.
Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^0$. Avec $C = \|f\|_\infty + 1$, $A = 1$ et $n = 0$, $f \in E$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Toute fonction continue et bornée sur } [0,+\infty[\text{ appartient à } E}$$

c) Soit f une fonction polynomiale de degré n.
La fonction $g : t \mapsto f(t)/t^n$ est continue sur $[1, +\infty[$ et a une limite finie en $+\infty$ donc est bornée sur $[1, +\infty[$. Notons $C = \sup_{[1,+\infty[} |g| + 1 > 0$. Par définition, pour tout $t \geqslant 1$, $|g(t)| \leqslant C$.
Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^n$. Donc, avec $C = \sup_{[1,+\infty[} |g| + 1$, $A = 1$ et $n = \deg f$, $f \in E$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{Toute fonction polynomiale sur } [0, +\infty[\text{ appartient à } E}$$

Autre preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto t^n$ appartient à E ($A = 1$, $C = 1$, $n = n$).
De plus, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (1)2)a)), donc $\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$, c'est-à-dire

$$\boxed{\textit{L'ensemble des fonctions polynomiales est inclus dans } E.}$$

3) Définition de la transformée de Laplace.

a) Soit x un réel strictement positif.
La fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall t \geqslant A$, $|f(t) \leqslant Ct^n$. Ainsi,

$$\forall t \geqslant A \qquad |t^2 f(t)e^{-xt}| \leqslant Ct^{n+2}e^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{(croissance comparée, } x > 0)$$

Donc, $|f(t)e^{-xt}| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après Riemann.
En conclusion, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

b) On fixe un réel $a > 0$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[a, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après 3a et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times[0, +\infty[\qquad |f(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

(La majoration doit être vraie « pour tout t dans le domaine d'intégration ».)
Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est définie et continue sur } [a, +\infty[.}$$

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Posons $a = x/2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[a, +\infty[= [x/2, +\infty[$ qui contient x, donc $\mathcal{L}(f)$ est continue en x. Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est continue en x pour tout $x > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

c) D'après 3b, pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ existe et est une fonction définie et continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\forall (f, g) \in E^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda\mathcal{L}(g)$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La transformée de Laplace est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathscr{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})}$$

4) Propriétés de la transformée de Laplace.

a) Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu lorsque $x \to +\infty$.
Soit $a > 0$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)e^{-xt} = 0$.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, de même que la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 3)a) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad |f(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f) = 0}$$

b) On fixe un réel $a > 0$. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Posons $h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$,
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est **intégrable** sur $\mathbb{R}_+$ d'après 3a,
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto t|f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'après 3a : $t \mapsto tf(t) \in E$) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = |tf(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } (\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

$\mathcal{L}(f)$ est donc C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc elle est C^1 sur la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.
De plus, on a toujours, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\boxed{(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t}$$

c) **i)** Soit $x \geqslant 0$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Du x dans les bornes ? Poser une primitive de ce qu'il y a dans l'intégrale.

Soit G une primitive de f continue sur $\mathbb{R}_+$. La convergence de l'intégrale précédente entraîne l'existence et la finitude de $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$. De plus,

$$F(x) = \lim_{t\to+\infty} G(t) - G(x)$$

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est bien définie et } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[, \text{ et } F' = -f}$$

En utilisant l'expression précédente de F, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} G(t) - \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
Par définition de la limite, il existe donc $A \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|F(x)| \leqslant 1$. Soit un tel A : F est borné sur $[A, +\infty[$.
De plus, F est continue sur le segment $[0, A]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, F est bornée sur $[0, A]$. En conclusion,

$$\boxed{F \text{ est bornée sur } [0,+\infty[}$$

ii) Soit $x>0$. Intégrons par parties : posons

$$\begin{cases} u=-F & u'=f \\ v=e^{-xt} & v'=-xe^{-xt}\end{cases}$$

Comme F est bornée d'après 4(c)i, $|uv| \leqslant \|F\|_\infty e^{-xt}$. Par majoration, $\lim\limits_{t\to+\infty} uv = 0$.

Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u'v$ $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature (convergentes d'après 3a), et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-F(t)e^{-xt}\right]_0^{+\infty} - x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to0} x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = 0$: Soit $\varepsilon>0$.

La preuve fait penser à celle de Cesàro : on coupe d'intégrale en 2, avec le x en facteur qui permet de conclure pour un morceau, et l'autre via le ε.

Par définition de la limite, $\lim\limits_{+\infty} F = 0$ entraîne l'existence de $A \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|F(t)| \leqslant \varepsilon$. Soit un tel $A \geqslant 0$. On a

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{A} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

D'une part, $\left|\int_0^{A} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A |F(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant A\|F\|_\infty$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_A^{+\infty} |F(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}\,\mathrm{d}t && \text{Par définition de } A \\ &\leqslant \varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{x}\end{aligned}$$

Donc

$$\left|x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant xA\|F\|_\infty + \varepsilon$$

Comme $\lim\limits_{x\to0} xA\|F\|_\infty = 0$, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $x\in]0,\eta]$, $|xA\|F\|_\infty| \leqslant \varepsilon$. Soit un tel η. *Un rapide calcul nous donne $\eta = \varepsilon/(A\|F\|_\infty+1)$ convient, mais ce calcul est inutile.*

Il vient, donc,

$$\forall x\in]0,\eta], \qquad \left|x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, nous venons de montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ |x|\leqslant\eta \Longrightarrow \left|x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = 0$.

En reprenant la formule obtenue lors de l'intégration par parties, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

5) Calcul de l'intégrale de Dirichlet.
Notons f et g deux fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) La fonction f est bornée donc, d'après 2b, $f \in E$.
Comme $g(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, g est continue en 0. Donc g bornée sur $[0, 1]$ d'après le théorème des bornes atteintes. Et $|g| \leqslant 1$ sur $[1, +\infty[$. Donc g est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $g \in E$.
On peut aussi utiliser $|\sin x| \leqslant |x|$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont dans } E}$$

Calcul de $\mathcal{L}(f)$: Soit $x > 0$.
La fonction $t \mapsto e^{it}e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|e^{it}e^{-xt}| = e^{-xt}$ pour tout $t \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{-x+i} e^{(-x+i)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{-x+i} = \frac{x+i}{1+x^2} \end{aligned}$$

Quelques principes de bonne manipulation des nombres complexes : $z = a + ib$ (plutôt que $ib + a$), et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ (se débarrasser des i au dénominateur le plus vite possible).
Donc

$$\mathcal{L}(f)(x) = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt} \,\mathrm{d}t \right) = \frac{1}{1+x^2}$$

b) Soit $x > 0$. D'après 4b,

$$(\mathcal{L}(g))'(x) = -\int_0^{+\infty} tg(t)e^{-xt} \,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(f)(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

D'où $\mathcal{L}(g)(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.
Or, d'après 4a, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(g)(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \pi/2$, $C = \pi/2$ et

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(g)(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}}$$

c) À insérer ici : démonstration de la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$. Notons

$$G : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} g(t) \,\mathrm{d}t$$

Comme g est bornée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \,\mathrm{d}t$ converge, G est bien définie et d'après 4(c)ii,

$$\lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \int_0^{+\infty} g(t) \,\mathrm{d}t$$

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \operatorname{Arctan}(0) + \pi/2 = \pi/2$. D'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$