

Devoir de Mathématiques numéro 2

L'exercice 1 est à faire *avant* le concours blanc, la correction est en ligne : commencez par chercher, et rédiger, sans la regarder. Puis corrigez-vous.
L'exercice 2 est à faire par ceux qui veulent s'entraîner à un concours de type Mines-Ponts ou CentraleSupelec – à rendre pour le 13 novembre. L'exercice 3 est à rendre pour le 13 novembre. Il vous entraînera pour le DS qui suivra, le 18 novembre.
N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous bloquez sur une question, ou si vous avez la moindre question – les mathématiques étant parfois délicates à taper, écrivez sur une feuille et envoyez moi la photo.
Bonnes révisions !

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – auto-correction)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;\ +\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

- **a)** Montrer que $D_\zeta =]1, +\infty[$.
- **b)** La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur D_ζ ?
- **c)** Soit $a > 1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- **d)** Montrer que la fonction ζ est continue sur D_ζ.

2) Variations de ζ et conséquences.

- **a)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f décroissante sur I, et celle de f croissante sur I.
- **b)** Étudier le sens de variations de ζ.
- **c)** Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

3) Étude aux bornes.

- **a)** **i)** Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.
  - **ii)** En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

- **b)** Étude au voisinage de $x = 1$.
  - **i)** Étudiez la limite de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
  - **ii)** Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
- **c)** Étude au voisinage de $+\infty$: déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) Fonction de Dirichlet. On pose :

$$\forall x \in]0;\ +\infty[, \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$$

a) Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$

c) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que :

$$\forall x \in]1,\ +\infty[, \qquad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x} \zeta(x)$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

b) Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(\ln n)^k}{n^x}$.

c) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$, et retrouver les variations de ζ obtenues plus haut.

d) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble, infini, des nombres premiers. Notons $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

On montrera, à l'aide des probabilités, que, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-x}}$.

Exercice 2 (type Mines, Centrale)

On rappelle que $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

1) Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

3) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

4) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

5) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$$

6) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

7) En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

8) En déduire le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 3 (Transformée de Laplace)

Dans tout cet exercice, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\quad \forall t \geqslant A, \quad |f(t)| \leqslant Ct^n$

1) Un exemple. Soit $n \geqslant 0$ un entier et $x > 0$ un réel.
Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

2) **a)** Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

c) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

3) Définition de la transformée de Laplace. On se donne $f \in E$.

a) Soit x un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
On notera alors jusqu'à la fin de l'exercice

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$. On pourra se placer sur un intervalle bien choisi.

c) En déduire que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de E dans l'espace $\mathscr{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ constitué des applications définies et continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

4) Propriétés de la transformée de Laplace. Les questions suivantes sont indépendantes. Soit $f \in E$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.

b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$.

c) On suppose de plus que f est bornée et que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Notons

$$F : x \in [0,+\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

i) Montrer que F est bien définie, $\mathscr{C}^1$ et bornée sur $[0,+\infty[$.

ii) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par une intégration par parties.

5) Calcul de l'intégrale de Dirichlet. Notons f et g deux fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f et g sont dans E. Calculer $\mathcal{L}(f)$.

b) En déduire $\mathcal{L}(g)$.

c) À l'aide de la question 4(c)ii, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.