Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – d'après Centrale PC 2018, E3A PC 2017)

C'est un sujet extrêmement classique, et donc une fonction à connaître.

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (Séries de Riemann). Donc

$$\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[}$$

On vient donc de montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur D_ζ.

b) Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 1$, $f_n(x) = e^{-x \ln n}$, d'où le tableau de variations :

x	1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$.

Conclusion : Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après Riemann, $\alpha = 1$), $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement } D_\zeta}$$

c) *Sur votre copie, vous ne faites pas un second tableau de variations : vous rajoutez a et $f_n(a)$ dans le tableau précédent.*

Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Calculons $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)|$ à l'aide du tableau de variations précédent :

x	1		a		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$		$-$		
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\frac{1}{n^a}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$.
Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (d'après Riemann, $a > 1$).
Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[}$$

d) D'après 1c, $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de D_ζ avec $a > 1$, donc sur tout segment de D_ζ.
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur D_ζ.
Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } D_\zeta}$$

2) Variations de ζ.

a) Une fonction f est dite croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Une fonction f est dite décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

b) Soit $(x, y) \in D_\zeta^2$, tels que $x \leqslant y$. Comme f_n est décroissante (cf 1b) pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \geqslant f_n(y)$$

En sommant et en passant à la limite, il vient,

$$\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$$

D'où

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

c) La fonction ζ est positive car $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Or elle est décroissante d'après 2b, donc

$$\boxed{\zeta \text{ admet une limite en } +\infty}$$

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1[$, car $x > 0$, donc

$$\forall t \in [n, n+1[, \qquad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

Pour $n \geqslant 2$, l'inégalité de gauche peut s'écrire

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}}$$

Ici, on fait le décalage d'indices avant *de sommer.*

ii) Soit $x \in D_\zeta$.

D'après Riemann ($x>1$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ converge et, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.

D'après Chasles,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

En intégrant à partir de $t=2$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

En sommant l'encadrement de la question 3(a)i entre 2 et N, il vient

$$\forall N \geqslant 2, \qquad \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

Toutes ces sommes convergent d'après ci-dessus, ainsi

$$\begin{array}{rccccc} & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} & \leqslant & \zeta(x)-1 & \leqslant & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in D_\zeta, \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}}$$

b) Étude au voisinage de $x=1$.

i) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, par minoration (3(a)ii),

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) \text{ existe et vaut } +\infty}$$

ii) Utilisons l'encadrement de la question 3(a)ii : comme $x-1>0$,

$$\forall x \in D_\zeta, \quad x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1} x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} = \lim_{x\to 1} x = 1$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)\zeta(x) = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}}$$

c) D'après l'encadrement de la question 3(a)ii, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$$

4) Fonction de Dirichlet.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1}{n^x}$ est positive, décroissante et de limite nulle ($x>0$). Donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

b) Soit $x > 0$. D'après le critère des séries alternées, la limite $\ell = F(x)$ est encadrée entre U_{2n} et U_{2n+1}, où $U_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$.
Pour $n = 1$, il vient

$$U_2 \leqslant F(x) \leqslant U_3$$

C'est-à-dire

$$\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
D'après le critère des séries alternées, le reste $R_n = \sum_{k=n+1} (-1)^{k-1}a_k$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, a_{n+1} :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \qquad \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)\right| = |R_n| \leqslant f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)^x}$$

$$\implies \forall x \in [a, +\infty[, \qquad \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(par décroissance de } f_{n+1})$$

$$\implies \qquad \|\zeta - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(en passant au sup)}$$

Conclusion : Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$ ($a > 0$), par majoration, $\lim_{n\to+\infty} \|\zeta - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k\|_\infty = 0$ et

$$\boxed{\sum(-1)^{n-1}f_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[}$$

On a convergence normale pour $a > 1$, mais pour $a \in]0, 1]$ il n'y a pas convergence normale, cf 1b et 1c.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1}f_n$ est continue (car f_n l'est) sur $[a, +\infty[$, et $\sum(-1)^{n-1}f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, F est continue sur $[a, +\infty[$.
Ceci est valable pour tout $a > 0$, donc sur $\bigcup_{a>0}[a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

C'est une autre façon de rédiger la question. On pouvait évidemment rédiger comme au 1d, et vice-versa.

e) Soit $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\zeta(x) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} \qquad \text{Or } \begin{cases} 1 + (-1)^n = 0 \text{ si } n = 2k+1 \text{ impair} \\ 1 + (-1)^n = 2 \text{ si } n = 2k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} \\
&= \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)}$$

f) D'après la question précédente, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} & (1-2^{1-x})\zeta(x) = F(x) \\ \Longrightarrow \quad & \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} F(x) \\ & = (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \quad \left(\text{car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \text{ et } 2^{1-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\right) \end{aligned}$$

Or, d'après 4b,

$$0 \leqslant 2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\right] \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc, par encadrement, $2^x \left[F(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2^x}\right)\right] = o(1)$, puis

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right) \qquad \left(\text{car } 2^{1-x} = \frac{1}{2^{x-1}} = 2 \times \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^x} - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)}$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in D_\zeta$, $f_n(x) = n^{-x} = e^{-(\ln n)x}$ donc f_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur D_ζ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-(\ln n)x} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}}$$

b) Question de cours. Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$ et $\alpha = \dfrac{x+1}{2} > 1$.

$$\begin{aligned} n^\alpha |u_n| &= (\ln n)^k n^{\alpha - x} && \text{Or } \alpha - x = \frac{1-x}{2} < 0 \\ &= (\ln n)^k n^{\frac{1-x}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 && \text{par croissance comparée} \end{aligned}$$

Donc $n^\alpha |u_n| = o(1)$, puis $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann, $\alpha > 1$).

Donc par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \text{ est convergente}}$$

c) *Lors d'une question « à tiroirs » de ce type, il faut bien structurer sa réponse. Ici, vous allez appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Pour ça, vous avez besoin de la convergence uniforme de la série des dérivées, qui n'a pas été montrée plus haut. Pour ça, vous allez sans doute montrer la convergence normale de* $\sum f_n'$*...*
Structurez !

- Convergence normale de $\sum f_n'$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad |f_n'(x)| = \frac{\ln n}{n^x}$$

Donc, d'après l'étude effectuée au 1c, $\|f_n'\|_\infty = \dfrac{\ln n}{n^a}$.

Or, d'après 5b avec $k=1$, $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ converge, donc

$$\sum f_n' \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Soit $1<a<b$.

D'après ci-dessus, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc normalement sur $[a,b]$, donc uniformément sur $[a,b]$.

Ainsi, $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_ζ.
  - $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur D_ζ d'après 1)a).
  - $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

  Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall x \in D_\zeta,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}}$$

- Variations de ζ sur D_ζ : $\forall x \in D_\zeta$, $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0$ donc

$$\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

d) Montrons que ζ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par la même méthode qu'à la question précédente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, d'après a),

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Donc, d'après 1c, $\|f_n^{(k)}\|_\infty = \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ et comme d'après 5b , $\sum \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge,

$$\sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Comme lors de la question c), $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]1,+\infty[$, donc uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.
- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ.
  - Pour tout $i \in [\![0,k-1]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur D_ζ d'après 5b.
  - $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

  Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme ($\mathscr{C}^k$) des séries de fonctions,

$$\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall i \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in D_\zeta,\ \zeta^{(i)}(x) = (-1)^i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^i n}{n^x}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}}$$

Exercice 2 (Centrale TSI 2023, partiel)

1) Si $f \in E$, on a bien $\mathcal{L}(f)$ qui est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a bien $\lambda f + \mu g \in E$.
De plus, par linéarité de l'inégrale généralisée convergente, pour $p > 0$,

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-pt} \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t + \mu \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} \mathrm{d}t.$$

On a donc bien écrit : pour tout $p > 0$

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda \mathcal{L}(f)(p) + \mu \mathcal{L}(g)(p).$$

On a donc l'égalité des fonctions :

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g).$$

Ainsi, $\mathcal{L}$ est linéaire.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, si $p > 0$, alors par croissances comparées :

$$t^n e^{-pt/2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$t^n e^{-pt/2} = o(1),$$

donc

$$t^n e^{-pt} = t^n e^{-pt/2} e^{-pt/2} = o\left(e^{-pt/2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{-pt/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (intégrale de référence, vu que $\dfrac{p}{2} > 0$).
Par comparaison de fonctions intégrables, la fonction $t \mapsto t^n e^{-pt}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t^n| e^{-pt} \mathrm{d}t$ converge donc.
Ainsi, $f_n \in E$.

3) On utilise le théorème d'intégration par parties généralisé avec $v : t \mapsto t^n$ et $u : t \mapsto -\dfrac{1}{p} e^{-pt}$. Ces fonctions u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a par croissances comparées $u(t)v(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'on a $u' : t \mapsto e^{-pt}$ et $v' : t \mapsto n t^{n-1}$. Remarquons qu'alors $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$.
On a alors (la première intégrale convergeant, ce qui assure la convergence de la deuxième)

$$F_n(t) = \int_0^{+\infty} u'(t) v(t) \mathrm{d}t = 0 - \left(-\frac{n}{p}\right) \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} \mathrm{d}t,$$

soit

$$F_n(p) = \frac{n}{p} F_{n-1}(p).$$

4) On fixe $p > 0$, et on montre le résultat demandé par récurrence simple sur n.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a immédiatement par le cours $F_0(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} \mathrm{d}t = \frac{1}{p} = \frac{0!}{p^{0+1}}$.
Soit $n \geqslant 1$, supposons que $F_{n-1}(p) = \dfrac{(n-1)!}{p^n}$. On a alors par la relation précédente :

$$F_n(p) = \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

On a donc bien démontré par récurrence simple que pour tout $n \geqslant 0$: $F_n(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

5) La fonction $t \mapsto e^{-a+ibt}$ est bien continue, comme exponentielle complexe d'une fonction continue. Soit $p > 0$, on a

$$|f_{a,b}(t)|e^{-pt} = e^{-(a+p)t}.$$

Or, comme $a \geqslant 0$ et $p > 0$, on a $a + p > 0$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_{a,b}(t)|e^{-pt}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), donc $f_{a,b} \in E$.

On a ensuite par primitivation directe, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f_{a,b}(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^A e^{-(a+p-ib)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+p-ib}e^{-(a+p-ib)t}\right]_0^A = \frac{1-e^{-(a+p-ib)A}}{a+p-ib}$$

Or, on a

$$|e^{-(a+p-ib)A}| = |e^{-(a+p)A}e^{-ibA}| = e^{-(a+p)A},$$

et comme $a + p > 0$, on a $e^{-(a+p)A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$:

$$F_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+p-ib}.$$

6) On a pour $t \in \mathbb{R}$, par les formules d'Euler :

$$g_{a,b}(t) = e^{-at}\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2} = \frac{1}{2}\left(f_{a,b}(t) + f_{a,-b}(t)\right)$$

Ainsi, $g_{a,b} = \dfrac{1}{2}f_{a,b} + \dfrac{1}{2}f_{a,-b}$

On obtient de même $h_{a,b} = \dfrac{1}{2i}f_{a,b} - \dfrac{1}{2i}f_{a,-b}$.

Comme $f_{a,b}$ et $f_{a,-b}$ appartiennent à E et comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ appartiennent à E.

On a alors par linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(p) &= \frac{1}{2}F_{a,b}(p) + \frac{1}{2}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+p-ib} + \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} H_{a,b}(p) &= \frac{1}{2i}F_{a,b}(p) - \frac{1}{2i}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{a+p-ib} - \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{b}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

Remarque : on aurait aussi pu démontrer, en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$, que pour une fonction $f \in E$, $\mathcal{L}(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\mathcal{L}(f))$ (*idem* pour la partie imaginaire), puis observer que $g_{a,b} = \mathrm{Re}(f_{a,b})$ et $h_{a,b} = \mathrm{Im}(f_{a,b})$.

7) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée. Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geqslant 0$: $|f(t)| \leqslant M$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $p > 0$:

$$|f(t)|e^{-pt} \leqslant Me^{-pt}.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} Me^{-pt}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, $f \in E$.

8) La fonction exponentielle (exp) est bien continue, or pour $p = \dfrac{1}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^t e^{-t/2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{t/2} \mathrm{d}t$$

diverge (intégrale de référence).

On vient donc de trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui n'appartient pas à E : la fonction exponentielle.

9) On applique le théorème d'intégration par parties pour à f et à $v : t \mapsto e^{-pt}$. Ces deux fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $v' : t \mapsto -pe^{-pt}$ et par hypothèse on a bien $f(t)v(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a notamment, comme $v(0) = 1$, $[f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} = -f(0)$.

Alors, toutes les intégrales écrites ici convergeant :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} \mathrm{d}t = [f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \mathrm{d}t.$$

soit exactement

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$