# Devoir de Mathématiques numéro 2

---

## Exercice 1

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace.
Les parties I et II sont consacrées à la définition et à certaines propriétés de cette transformation. Les résultats de ces deux parties pourront être admis pour aborder la partie III.

Dans tout ce problème, $E$ désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions $f$, définies et continues sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A>0$, un réel $C>0$ et un entier $n\in\mathbb{N}$ tels que

$$\forall t\geqslant A,\qquad |f(t)|\leqslant Ct^n$$

**Partie 1** (La transformation de Laplace)

**1)** Pour tout entier $n\geqslant 0$ et tout réel $x>0$, on considère l'intégrale impropre

$$I_n(x)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

**a)** Vérifier que pour tout réel $x>0$, l'intégrale $I_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que

$$I_0(x)=\frac{1}{x}$$

**b)** En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n\geqslant 0$ et tout réel $x>0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et

$$I_n(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}$$

**2)** **a)** Montrer que, muni des opérations usuelles, $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles.

**b)** Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$ appartient à $E$.

**c)** Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$ appartient à $E$.

**3)** On se donne $f\in E$.

**a)** Soit $x$ un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t\mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On notera alors jusqu'à la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

**b)** On fixe un réel $a>0$. Montrer que l'application $x\mapsto\mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

**4)** Montrer que l'application $\mathcal{L}: f\mapsto\mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de $E$ dans l'espace $\mathscr{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ constitué des applications définies et continues sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles.

**Partie 2** (Quelques propriétés des transformées de Laplace)
Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

**1)** Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

**2)** **a)** Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et que

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

pour tout $x \in ]0,+\infty[$.

**3)** On suppose de plus que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $f' \in E$.

**a)** Montrer que

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

pour tout $x \in ]0,+\infty[$.

**b)** Vérifier que la fonction $h : t \mapsto tf'(t)$ appartient à $E$ et montrer que

$$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)$$

pour tout $x \in ]0,+\infty[$.

**c)** On suppose que $f$ est de classe $C^2$ sur $[0,+\infty[$ et que $f'' \in E$. Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de $x$, $\mathcal{L}(f)(x)$, $f(0)$ et $f'(0)$.

**Partie 3** (Une application de la transformation de Laplace)
Dans cette partie, on se donne un entier $p \geqslant 1$ et on considère :

- le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y''(t) - ty'(t) + 2py(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

  où $y$ désigne une fonction définie et de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
  On admet que $(\mathcal{P})$ possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$, que l'on notera $Y$.

- l'équation différentielle

$$(J) \quad u'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right) u(x) = 1$$

  où $u$ désigne une fonction définie et de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles.

L'objectif de cette partie est d'expliciter $Y$ en passant par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Dans ce but, on note $f$ la restriction de $Y$ à l'intervalle $[0,+\infty[$ et on admet que $f$, $f'$ et $f''$ appartiennent à $E$. On note alors $U = \mathcal{L}(f)$.

**1)** À l'aide des résultats de la partie 2, montrer que $U$ est une solution de $(J)$ sur $]0,+\infty[$.

**2)** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $f_n$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n+1} e^{\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0.

**a)** À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier $n$ et tout réel $x$ une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

**b)** En déduire que

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} 2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

pour tout entier $n$ et tout réel $x$.

**3)** **a)** Donner une base de l'espace des solutions de l'équation sans second membre

$$(J') \quad u'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right) u(x) = 0$$

associée à $(J)$ sur $]0,+\infty[$.

**b)** En déduire que l'ensemble des solutions de $(J)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}\frac{1}{x^{2k+1}}$$

où $C$ est un réel quelconque.

**4)** **a)** Parmi les solutions ci-dessus, on désigne par $U_0$ celle correspondant à $C=0$.
Montrer, à l'aide des résultats de la partie 1, qu'il existe un polynôme $R$, dont on donnera les coefficients, tel que la restriction $R_0$ de $R$ à $[0,+\infty[$ vérifie $\mathcal{L}(R_0) = U_0$.

**b)** Montrer que $R$ est la solution de $(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 2

On rappelle que $\displaystyle\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ ».

**1)** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Rappeler la formule du binôme pour $(x+y)^n$.

**2)** Justifier que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1.$$

**3)** Montrer que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx.$$

**4)** Montrer que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

**5)** En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C>0$ à préciser.

On se donne maintenant $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et $\varepsilon>0$. On admet l'existence de $\alpha>0$ tel que, pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$,

$$|x-y|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{1}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x\in[0,1]$ on partitionne les entiers $k$ naturels entre 0 et $n$ en :

$$X = \left\{k\in\{0,1,\dots,n\} : \left|x-\frac{k}{n}\right|<\alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k\in\{0,1,\dots,n\} : \left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\alpha\right\}.$$

**6)** Montrer que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$$

**7)** En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

**8)** En utilisant la définition de l'ensemble $Y$ et les questions précédentes, montrer que

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

**9)** Conclure qu'il existe $n$ suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

**10)** En déduire le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.