

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;\ +\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

- **a)** Montrer que $D_\zeta =]1, +\infty[$.
- **b)** La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur D_ζ ?
- **c)** Soit $a > 1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- **d)** Montrer que la fonction ζ est continue sur D_ζ.

2) Variations de ζ et conséquences.

- **a)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f décroissante sur I, et celle de f croissante sur I.
- **b)** Étudier le sens de variations de ζ.
- **c)** Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

3) Étude aux bornes.

- **a)** **i)** Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

  ii) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

- **b)** Étude au voisinage de $x = 1$.
  - **i)** Étudiez la limite de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
  - **ii)** Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
- **c)** Étude au voisinage de $+\infty$: déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) Fonction de Dirichlet. On pose :

$$\forall x \in]0;\ +\infty[, \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$$

- **a)** Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- **b)** Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$

c) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum(-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que :

$$\forall x \in]1,\ +\infty[, \qquad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

b) Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(\ln n)^k}{n^x}$.

c) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$, et retrouver les variations de ζ obtenues plus haut.

d) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E fixée. Soit $\mathscr{D}$ la droite engendrée par $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et $\mathscr{P}$ le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

On pourra passer aux vecteurs colonnes dans $\mathscr{B}$: $\mathrm{Mat}\,(\varepsilon_1, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2) Déterminer la matrice M', dans la base $\mathscr{B}'$, du projecteur u sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

3) Donner la matrice M de u dans $\mathscr{B}$, directement ou à l'aide de la formule de changement de base.

Exercice 3

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1) Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

b) Justifier que $\mathrm{Ker}\ A_0 \neq \{0\}$ et en déterminer une base.

c) **i)** Calculer A_0U_0. En déduire que $U_0 \notin \mathrm{Ker}\ A$.

ii) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

2) Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \cdots \ell_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

b) Vérifier que $LC = \mathrm{Tr}\,(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A$ où $\mathrm{Tr}\,(A)$ désigne la trace de A, somme des coefficients diagonaux de A.

c) Soit λ une valeur propre réelle de la matrice A et X un vecteur propre associé : $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que l'ensemble $\mathrm{Sp}\,(A)$ des valeurs propres de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{Tr}\,(A)\}$.