

Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$.

- 1) Majorons $\exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$ indépendamment de x : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} t^2 > 0 &\implies \frac{1}{t^2} > 0 \\ &\implies \frac{x^2}{t^2} > 0 && \text{Car } x^2 \geq 0 \\ &\implies -\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right) < -t^2 \\ &\implies \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) < e^{-t^2} \end{aligned}$$

Posons

$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \varphi(t) = e^{-t^2}$

Montrons que φ est intégrable sur $[0, +\infty[$: La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$:

Par croissance comparée, $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison,

La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$

Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$: Soit $I =]0, +\infty[$, $D = \mathbb{R}$ et, définie sur $D \times I$,

$$h(x, t) = \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$$

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur D .
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- La fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus par $\varphi(t) = e^{-t^2}$ est **intégrable sur I** et, d'après ci-dessus,

$$\forall (x, t) \in D \times I, \quad 0 \leq h(x, t) \leq \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

F est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Parité : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{(-x)^2}{t^2}\right)\right) dt = F(x)$$

Donc

F est paire

2) Soit $0 < a < b : [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Majorons $\frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$ indépendamment de x : Soit $x \in [a, b]$ et $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} t^2 > 0 &\implies \frac{1}{t^2} > 0 \\ &\implies \frac{a^2}{t^2} \leq \frac{x^2}{t^2} \leq \frac{b^2}{t^2} && \text{Car } 0 < a \leq x \leq b \\ &\implies 0 < -\left(t^2 + \frac{b^2}{t^2}\right) \leq -\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right) \leq -\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right) \\ &\implies \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) \leq \exp\left(-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)\right) && \text{Or } 0 < \frac{2x}{t^2} \leq \frac{2b}{t^2} \\ &\implies \frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) \leq \frac{2b}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Posons

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \psi(t) = \frac{2b}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)\right)$$

Montrons que ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$: La fonction ψ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Étude en 0 : $\psi(t) \sim \frac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$.

Quand $t \rightarrow 0$, $u = \frac{1}{t^2}$ tends vers $+\infty$. Or $\lim_{u \rightarrow +\infty} 2bue^{-a^2u} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$. Ainsi, ψ est prolongeable par continuité en 0.

Par conséquent $\int_0^1 \psi(t) dt$ converge car faussement généralisée.

- Étude en $+\infty$:

Pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \psi(t) \leq \frac{2b}{t^2} e^{-t^2} \leq 2be^{-t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après 1). Donc, par théorème de majoration, $\int_1^{+\infty} \psi(t) dt$ converge.

Conclusion :

La fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Montrons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

Posons $D = [a, b]$, $I =]0, +\infty[$ et h comme ci-dessus.

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ;
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur I (d'après 1)) ;

la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$ est $\mathcal{C}^0$ donc continue par morceaux sur I .

- Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \frac{2b}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)\right)$. La fonction φ est **intégrable sur I** d'après ci-dessus et, toujours d'après ci-dessus

$$\forall (x, t) \in D \times I, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) \leq \psi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b] \text{ et } F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt.$$

Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\bigcup_{0 < a < b} [a, b] = \mathbb{R}_+^*$:

$$F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt.$$

- 3) On cherche un changement de variable qui laisse inchangé $]0, +\infty[$: il y a $u = \frac{1}{t}$. On essaye, on ajuste. Deviner un changement de variable est une question relativement délicate, mais comme je vous l'ai déjà dit, je suis là pour répondre aux questions si vous êtes bloqués.

Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $u = \varphi(t) = \frac{x}{t}$.

La fonction φ est $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $du = -\frac{x}{t^2} dt$, $t = \frac{x}{u}$. Et φ envoie 0 sur $+\infty$ et $+\infty$ sur 0 (bornes).

Donc, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$ et $-\int_0^{+\infty} 2 \exp\left(-\left(\left(\frac{x}{u}\right)^2 + u^2\right)\right) du$ sont de même nature, donc convergente d'après 2), et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt \\ &= -\int_0^{+\infty} 2 \exp\left(-\left(\left(\frac{x}{u}\right)^2 + u^2\right)\right) du \\ &= -2F(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{La fonction } F \text{ est solution de } y' + 2y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

- 4) Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les f telles que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = Ce^{-2x}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $F(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Or F est continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (exercices 1 et 2 de la feuille d'exercice de la semaine – ce n'est pas à connaître par coeur). Donc

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} Ce^{-2x} = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Nous savons de plus, d'après 1), que F est paire. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

On remarque que F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 (d'après CCP MP 2020)

1) Informatique.

```

1  def cantor(n, x):
2      """Keyword arguments:
3      n — entier positif
4      x — float dans l'intervalle [0, 1]
5      retourne la valeur en x de la fonction f_n
6      """
7      if n == 0:
8          return x
9      if x <= 1/3:
10         return cantor(n-1, 3*x)/2
11     elif x < 2/3:
12         return 1/2
13     else:
14         return (1 + cantor(n-1, 3*x-2))/2

```

2) La syntaxe utilisée pour obtenir ces tracés peut vous intéresser, elle est sur ma page web.

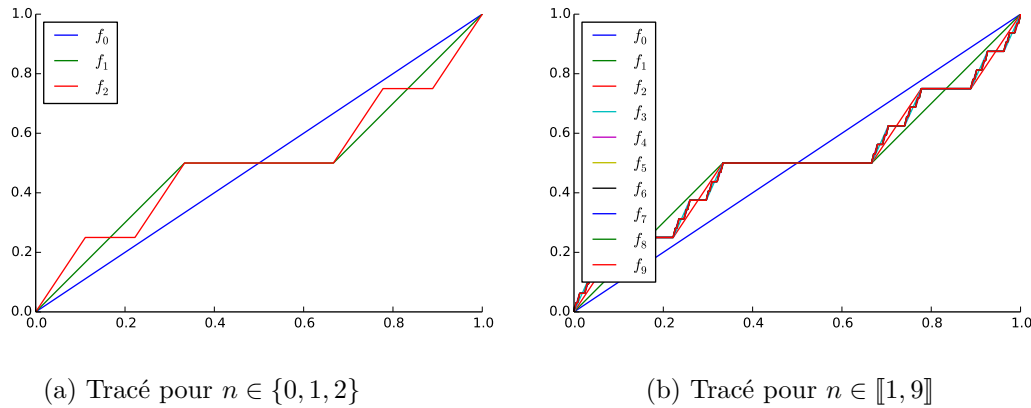


FIGURE 1 – Tracé des courbes représentatives de f_n .

Pour $n = 1$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_1(x) = \begin{cases} 3x/2 & \text{si } x \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 < x < 2/3 \\ (3x-1)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \end{cases}$$

3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall x \in [0, 1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Pour $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f_1(x) - f_0(x) = \frac{3x}{2} - x = \frac{1}{2}x \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$, donc

$$|f_1(x) - f_0(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{0+1}}$$

Pour $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $f_1(x) - f_0(x) = \frac{1}{2} - x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$, donc la majoration est vraie.

Pour $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $f_1(x) - f_0(x) = \frac{3x-1}{2} - x = \frac{x-1}{2} \in \left[-\frac{1}{6}, 0\right]$, donc la majoration est vraie.

Ainsi, $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$,

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= |f_{n+1}(3x)/2 - f_n(3x)/2| && \text{Par définition} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} && (\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

Pour $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, donc la majoration est vraie.

Pour $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$,

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= |(1 + f_{n+1}(3x - 2))/2 - (1 + f_n(3x - 2))/2| && \text{Par définition} \\ &= \frac{1}{2} |f_{n+1}(3x - 2) - f_n(3x - 2)| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} && (\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$

- 4) D'après 3), $|f_{n+1} - f_n|$ est bornée sur $[0, 1]$ (ce que l'on sait dès que l'on montre que les f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$), et

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

Ainsi, la série de fonction de terme général $u_n = f_{n+1} - f_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $[0, 1]$.

De plus, $\sum_{n=0}^N f_{n+1} - f_n = f_{N+1} - f_0$, donc

La suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$

- 5) Continuité des f_n : Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : f_n \text{ est continue sur } [0, 1], \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie car $x \mapsto x$ est continue sur $[0, 1]$ et vérifie les égalités demandées.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Par continuité de f_n , f_{n+1} est continue sur $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

En $x = \frac{1}{3}$: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ (fonction constante), et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}, x \leq \frac{1}{3}} f_{n+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x)/2 \\ &= f_n(1)/2 && \text{Par continuité de } f_n \text{ en } 1 \\ &= \frac{1}{2} && \mathcal{H}_n : f_n(1) = 1 \end{aligned}$$

Donc f_{n+1} est continue en $x = \frac{1}{3}$.

En $x = \frac{2}{3}$, de même : $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ (fonction constante), et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}, x \geq \frac{2}{3}} f_{n+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f_n(x))/2 \\ &= (1 + f_n(0))/2 && \text{Par continuité de } f_n \text{ en } 0 \\ &= \frac{1}{2} && \mathcal{H}_n : f_n(0) = 0 \end{aligned}$$

Donc f_{n+1} est continue en $x = \frac{2}{3}$.

De plus, $f_{n+1}(0) = f_n(3 \times 0)/2 = 0$ et $f_{n+1}(1) = (1 + f_n(3 - 2))/2 = 1$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

• Conclusion :

$$\forall n \geq 0 \quad f_n \text{ est continue sur } [0, 1], \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

Continuité de f

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$ d'après ci-dessus.
- D'après 4, (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$

Donc, d'après le théorème de continuité,

La limite f de la suite des (f_n) est continue sur $[0, 1]$

6) • Croissance : Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f_n \text{ est croissante sur } [0, 1] \text{ et } f_n([0, 1]) = [0, 1]$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: Comme $f_0 = \text{id}_{[0,1]}$, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
 - Pour $x \in [0, 1/3]$, f_{n+1} est croissante par croissance de f_n et $f_{n+1}(x) = f_n(3x)/2 \leq 1/2$.
 - Pour $x \in]1/3, 2/3[$, $f_{n+1}(x) = 1/2$ est supérieur à $f_{n+1}(y)$ pour $y \in [0, 1/3]$, donc f_{n+1} est croissante sur $[0, 2/3[$.
 - Pour $x \in [2/3, 1]$, $f_{n+1}(x) = (1 + f_n(3x - 2))/2$ est supérieure à $1/2$ donc à tout $f_{n+1}(y)$ avec $y \in [0, 2/3]$. De plus, par croissance de f_n sur $[0, 1]$, f_{n+1} est croissante sur $[2/3, 1]$.
 Donc f_{n+1} est croissante sur $[0, 1]$.

Par conséquent, f_{n+1} est à valeurs dans $[f_{n+1}(0), f_{n+1}(1)]$. De plus, d'après 5, $f_{n+1}(0) = 0$ et $f_{n+1}(1) = 1$. Donc $f_{n+1}([0, 1]) = [0, 1]$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad f_n$ croissante sur $[0, 1]$ et d'image $[0, 1]$.

Ce qui entraîne

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \quad (x \leq y \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \leq f_n(y))$$

D'où, par passage à la limite (convergence simple),

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \quad (x \leq y \implies f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = f(y))$$

Donc

La fonction f est croissante sur $[0, 1]$

- Image : De plus, d'après 5), $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc, par passage à limite, $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$. De même $f(1) = 1$. Or d'après ci-dessus f est croissante. Donc

La fonction f est à valeurs dans $[0, 1]$

- Surjectivité : f est continue, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout $c \in [f(0), f(1)] = [0, 1]$ admet au moins un antécédent. Donc

La fonction f est surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$

- 7) a) L'union définissant C_{n+1} est disjointe : $\frac{C_n}{3} \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$ donc $\left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right) \subset \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ et

$$\frac{C_n}{3} \cap \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \emptyset$$

Comme $\ell(C_n/3) = \ell(C_n)/3$ et $\ell(x + I) = \ell(I)$, il vient

$$\begin{aligned} \ell(C_{n+1}) &= \ell\left(\frac{C_n}{3}\right) + \ell\left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right) \\ &= 2\ell\left(\frac{C_n}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\ell(C_n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\ell(C_n) \quad \text{et} \quad C_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Or, pour tout couple d'ensembles (A, B) admettant une longueur, si $A \subset B$ alors $\ell(A) \leq \ell(B)$ (car $B = A \cup (B \setminus A)$, union disjointe, et qu'une longueur est toujours positive).

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset C_n$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Par encadrement,

$$\ell(C) = 0$$

- b) Par récurrence.
c) Par récurrence et par construction de f_n .
d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur chacun des intervalles ouverts de C_n , f_n est dérivable de dérivée nulle. Montrons que, pour tout $k \geq n$, f_k est constante sur les intervalles où f_n est constante.

On en déduit, en passant à la limite, que f est constante sur chacun des intervalles ouverts de C_n , donc dérivable de dérivée nulle.

Soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\ell([x - \varepsilon, x + \varepsilon]) = 2\varepsilon > 0$, $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap ([0, 1] \setminus C) \neq \emptyset$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $x_n \in [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap ([0, 1] \setminus C)$. Par construction, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin C$, donc dans un petit intervalle où $f' = 0$. D'où $f'(x_n) = 0$.

Si f' est continue, $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$, et donc $f' = 0$.

Donc f serait constante sur $[0, 1]$, or $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$: c'est absurde.

Ainsi, f n'est pas $\mathcal{C}^1$.