

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$.

- 1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Parité.
- 2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée. Indication : On se placera sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
- 3) Montrer que F est solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra utiliser un changement de variable.
- 4) En déduire une expression de F sur $\mathbb{R}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 (Escalier de Cantor)

On note f_0 la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_0(x) = x$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1/2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ (1 + f_n(3x - 2))/2 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

- 1) *Informatique*. Écrire en Python une fonction récursive `cantor(n, x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.
- 2) Représenter l'allure graphique des fonctions f_0 , f_1 et f_2 .
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

- 4) En déduire que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
Indication : On pourra étudier la convergence normale d'une série télescopique bien choisie.

La limite de la suite (f_n) est notée f . On l'appelle la fonction de Cantor-Lebesgue.

- 5) Démontrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$
- 6) Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0, 1]$, et croissante. Puis qu'elle est surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- 7) Questions bonus. Si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, notons $\frac{I}{3} = \left[\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right]$ et, si $x \in \mathbb{R}$, notons $x + I = [x + a, x + b]$.

Définissons par récurrence une suite de parties de $[0, 1]$:

$$C_0 = [0, 1], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right)$$

On pose de plus

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

- a)** Si $I = [a, b]$ (ou $]a, b[$, $[a, b[$, etc.) est un intervalle, on pose $\ell([a, b]) = b - a$ la longueur de I .
 Si $X = I \cup J$ est une union disjointe d'intervalles, on note $\ell(X)$ la longueur de X définie par $\ell(X) = \ell(I) + \ell(J)$.
 Si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est une union disjointe d'intervalles, on définit $\ell(X)$, la longueur de X , comme la

$$\text{somme des longueurs des intervalles : } \ell(X) = \ell\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n).$$

On admet que $\ell(C)$ existe (*cf.* le cours sur les tribus, à venir, et la question suivante). Une longueur est toujours positive.

$$\ell\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\ell(C_n)$. En déduire $\ell(C)$.

- b)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[0, 1] \setminus C_n$ est une union d'intervalles ouverts.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est constante sur chaque intervalle de $[0, 1] \setminus C_n$.
d) En déduire que f est dérivable, et de dérivée nulle, sur une union d'intervalles ouverts de $[0, 1]$ de longueur 1. Est-ce que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$?