Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 2 octobre 2025

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (Concours licence 2025)

1) En 0 : $\text{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \sim_0 \dfrac{1}{x}$.

En $x = \pi + h,$

$$\begin{aligned} \text{cotan}\,(x) &= \text{cotan}\,(\pi + h) \\ &= \frac{\cos(\pi+h)}{\sin(\pi+h)} \\ &= \frac{-\cos(h)}{-\sin(h)} \\ &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} \\ &\sim_\pi \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Donc $\text{cotan}\,(x) \sim \dfrac{1}{x-\pi}$.

2) (a) La fonction $g : x \mapsto f(x)f'(x)\,\text{cotan}\,(\pi x)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,1[$ comme composée de fonctions continues.

<u>Étude en 0</u> : $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) = xf'(0) + o(x)$ et $f'(x) = f'(0) + o(1)$. Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= (xf'(0) + o(x))(f'(0) + o(1))\,\text{cotan}\,(\pi x) \\ &= (xf'(0)^2 + o(x))\left(\frac{1}{\pi x} + o(\frac{1}{x})\right) \\ &= f'(0)^2/\pi + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f'(0)^2/\pi$. Par conséquent g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{1/2} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en 1</u> : Posons $x = 1 - h$. La situation est la même :

$$\begin{aligned} g(1-h) &= f(1-h)f'(1-h)\,\text{cotan}\,(\pi - \pi h) \\ &= [f(1) - hf'(1) + o(h)]\,[f'(1) + o(1)]\,[-\text{cotan}\,(\pi h)] \\ &= \left[hf'(1)^2 + o(h)\right]\left[\frac{1}{\pi h} + o(\frac{1}{h})\right] \\ &= f'(1)^2/\pi + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} g(1-h) = f'(1)^2/\pi$. Par conséquent g est prolongeable par continuité en $x = 1$.

Donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } I \text{ est bien définie}}$$

(b) Effectuons une intégration par parties : posons

$$u = f^2(x) \qquad u' = 2f'(x)f(x)$$
$$v = \operatorname{cotan}(\pi x) \qquad v' = -\pi(1 + \operatorname{cotan}(\pi x))$$

En $x = 0$, un DL donne

$$\begin{aligned} uv &= f^2(x) \operatorname{cotan}(\pi x) \\ &= \Big[x f'(0) + o(x) \Big]^2 \Big[\frac{1}{\pi x} + o(\frac{1}{x}) \Big] \\ &= x f'(0)^2/\pi + o(x) \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} uv = 0$ (et existe).
De même, en $x = 1 + h$, $uv = hf'(1)^2/\pi + o(h)$ et $\lim\limits_{x \to 1} uv = 0$.
Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature.
Or $\int_0^1 u'v = 2I$ converge d'après 2.a, par conséquent les intégrales convergent. Et le théorème d'intégration par parties donne

$$\boxed{2I = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv' = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \Big(1 + \operatorname{cotan}^2(\pi x)\Big)\, \mathrm{d}x}$$

(c) La fonction $g : x \mapsto (f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x))^2$ est continue sur $]0, 1[$.
Un DL en $x = 0$ donne, comme à la question 2a,

$$f(x) \operatorname{cotan}(\pi x) = f'(0)/\pi + o(1)$$

Donc g prolongeable par continuité en $x = 0$ par $g(0) = (f'(0) - f'(0))^2 = 0$.
De même en $x = 1$, $f(x) \operatorname{cotan}(\pi x) = f'(1)/\pi + o(1)$ donc g prolongeable par continuité en $x = 1$ par $g(1) = 0$.
Ainsi, $\int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x$ est faussement généralisée, et

$$\boxed{\text{L'intégrale } J \text{ est bien définie}}$$

(d) *Attention ! Lorsque vous utilisez la linéarité de l'intégrale, vérifiez que toutes les intégrales convergent.*

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f'(x)^2 - 2\pi f(x) f'(x) \operatorname{cotan}(\pi x) + \pi^2 f(x)^2 \operatorname{cotan}^2(\pi x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x$ est sur un segment, donc convergente, et $2\pi I$ converge d'après 2a.
Donc $\int_0^1 \pi^2 f(x)^2 \operatorname{cotan}^2(\pi x) \, \mathrm{d}x$ converge comme somme d'intégrales convergentes. Et il vient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x - 2\pi \int_0^1 f(x) f'(x) \operatorname{cotan}(\pi x) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \pi^2 f(x)^2 \operatorname{cotan}^2(\pi x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 (1 + \operatorname{cotan}^2(\pi x)) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \pi^2 f(x)^2 \operatorname{cotan}^2(\pi x) \, \mathrm{d}x \quad \text{(d'après 2b)} \\ &= \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

De plus, par positivité de l'intégrale, $J \geqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

3) On résout l'équation différentielle. Une primitive de $x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$ sur $]0,1[$ est $x \mapsto \ln(\sin(\pi x))$ ($\sin(\pi x) > 0$). D'où, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante,

$$\forall x \in]0,1[, \quad y(x) = Ce^{\ln(\sin(\pi x))} = C\sin(\pi x)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x \mapsto C\sin(\pi x) \;\mid\; C \in \mathbb{R}\}}$$

4) Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x$.
D'après le calcul de la question d, $J = 0$.
Or $x \mapsto (f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x))^2$ est continue sur $]0,1[$, et positive.
Donc, d'après le théorème de l'intégrale nulle et de la fonction nulle,

$$\forall x \in]0,1[, \quad (f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x))^2 = 0$$

Ce qui signifie que f est solution de l'équation différentielle précédente. Ainsi, $f(x) = C\sin(\pi x)$ pour tout $x \in]0,1[$ pour un $C \in \mathbb{R}$ fixé.
Par continuité de f en 0 et en 1, il vient

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = C\sin(\pi x)$$

On remarque que f ainsi définie est bien $\mathscr{C}^1$, et vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Donc $f \in E$, il n'y a pas de contradiction.
Réciproquement, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = C\sin(\pi x)$. On a $f \in E$, et $f'(x) = \pi C\cos(\pi x)$, puis, avec le changement de variable $u = 1 - x$,

$$\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^0 C^2 \cos(\pi u)^2 (-1) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'(u)^2 \,\mathrm{d}u$$

Ainsi, les fonctions vérifiant l'égalité sont exactement les

$$\boxed{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = C\sin(\pi x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 2 (d'après PT C 2018)

Partie 1 (Préambule)

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{k} \int_a^b f'(t) \,\mathrm{e}^{ikt} \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{k} \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t) \,\mathrm{e}^{ikt} \,\mathrm{d}t = 0}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{ik}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{e^{ikb}}{ik} - f(a)\frac{e^{ika}}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)|}{k} + \frac{f(a)}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après a), $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Partie 2

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

La fonction $f_n : \left\{\begin{array}{rcl}]0,\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(2nt)}{\tan t}\end{array}\right.$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.

<u>Étude en 0</u> : $f_n(t) \sim \dfrac{2nt}{t} = 2n$ ($\neq 0$ car $n \geqslant 1$). Donc $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 2n$ et f_n est prolongeable par continuité en $t = 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en $\frac{\pi}{2}$</u> : Soit $t = \dfrac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \frac{\sin(n\pi - 2nh)}{\tan(\pi/2 - h)} \\ &= (-1)^{n+1}\sin(2nh)\frac{\sin(h)}{\cos(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Donc f_n est aussi prolongeable par continuité en $t = \dfrac{\pi}{2}$, et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Calculons I_1 : pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2t)}{\tan t} &= \frac{\sin(2t)\cos t}{\sin t} \\ &= \frac{2\sin t\cos^2 t}{\sin t} \\ &= 2\cos^2 t \\ &= \cos(2t) + 1\end{aligned}$$

Donc $I_1 = \left[\dfrac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :

$$\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t} &= \mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\\ &= 2\left(-\sin\left((2n+1)\,t\right)\sin t + \mathrm{i}\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t\right)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t.}$$

d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t = \cos\left((2n+2)\,t\right) + \cos\left(2nt\right)$$

donc, comme $2n \neq 0$ et $2n+1 \neq 0$,

$$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin\left((2n+2)\,t\right)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin\left(2nt\right)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Avec la question (b), on peut conclure que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est constante égale à } \pi/2.}$$

2) Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(pt\right)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(pt\right)}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement généralisée.
C'est vrai notamment pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.

$$\boxed{\text{Les intégrales considérées sont convergentes.}}$$

3) Comme différence de telles fonctions, φ est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

<u>Prolongement par continuité</u> :

- En $\dfrac{\pi}{2}$: Pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

  Donc $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \varphi(t) = \frac{2}{\pi}$: φ se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.

- En 0 : pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi(t) = \frac{\tan t - t}{t\tan t} = \frac{t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right) - t}{t\tan t} = \frac{\frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)}{t\tan t}$$

Ainsi $\varphi(t) \sim \dfrac{\frac{t^3}{3}}{t}^{2} = \dfrac{t}{3} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$: φ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

La fonction φ se prolonge en une fonction $\widetilde{\varphi}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Caractère $\mathscr{C}^1$: Nous allons appliquer à $\widetilde{\varphi}$ le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.
Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\widetilde{\varphi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

- En $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

- En 0 : $(t - \tan t) \sim -\frac{t^3}{3}$ et $(t + \tan t) \sim 2t$ donc

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-\tan t)(t+\tan t)}{t^2 \tan^2 t} \sim \frac{-\frac{t^3}{3} \times 2t}{t^4} = \frac{-2}{3}$$

  donc

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}'(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué en $a = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\text{Le prolongement } \widetilde{\varphi} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

4) Puisque $\widetilde{\varphi}$ est C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t)\, \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t$$

converge vers 0, et la suite extraite $(\alpha_{2n})_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $(\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}))$ car $0 \leqslant |\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n})| \leqslant |\alpha_{2n}|$. Or

$$\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t) \sin(2nt)\, \mathrm{d}t = J_n - I_n$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (J_n - I_n) = 0}$$

5) **a)** La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue donc continue par morceaux sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
Étude en $+\infty$: Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle.

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = \cos t & v'(t) = -\sin t \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or $|u'(t)v(t)| = \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.

Donc, par théorème de majoration,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

est absolument convergente donc convergente.
Donc le théorème d'intégration par parties nous donne

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

b) La fonction $t \mapsto u = 2nt$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$