

Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1 (Une inégalité de Poincaré)

Dans cet exercice, on note

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles, s'annulant en 0 et en 1.

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Poincaré :

$$\forall f \in E, \quad \int_0^1 (f(x))^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx,$$

et de caractériser les fonctions $f \in E$ pour lesquelles il y a égalité.

On définit la fonction $\cotan :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

- 1) Déterminer un équivalent simple de $\cotan(x)$ lorsque x tend vers 0 puis un équivalent simple lorsque x tend vers π .
- 2) Soit $f \in E$. On note

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) \, dx, \quad J = \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2 \, dx.$$

- (a) Montrer que l'intégrale I est bien définie.
- (b) Montrer que

$$2I = \pi \int_0^1 (f(x))^2 (1 + \cotan^2(\pi x)) \, dx.$$

- (c) Montrer que l'intégrale J est bien définie.
- (d) En développant J , montrer que

$$\int_0^1 (f(x))^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx.$$

- 3) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in]0, 1[, \quad y'(x) = \pi \cotan(\pi x) y(x).$$

- 4) Déterminer les fonctions $f \in E$ telles que

$$\int_0^1 (f(x))^2 \, dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx.$$

Exercice 2

Partie 1 (Préambule)

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f , de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- 1) Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t) e^{ikt} dt$.
- 2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \int_a^b f(t) e^{ikt} dt = 0.$$

Partie 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt.$$

- 1) a) Étudier, pour tout entier naturel non nul n , la convergence de l'intégrale I_n .
 b) Déterminer I_1 .
 c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n , la quantité :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$

en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.

- d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

- 2) Étudier la convergence des intégrales J_n , $n \in \mathbb{N}^*$, et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 3) Montrer que la fonction φ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\tilde{\varphi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 4) Que vaut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - I_n)$? On pensera à utiliser le préambule.

- 5) a) Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

- b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(on pourra utiliser un changement de variable).

- c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$