Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (CCINP PSI 2024)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction continue définie par $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $t^2 f(t) = o(1)$, et ainsi

$$f(t) = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par théorème de comparaison (fonctions positives),

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

- Étude en 0 : En 0, $e^u = 1 + o(1)$, donc

$$f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ (Riemann), ce qui équivaut à $x > 0$.
Donc, par théorème de comparaison (fonctions positives),

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } x > 0$$

- Conclusion

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } x > 0.}$$

2) Soit $x > 0$. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $\Gamma(x+1)$. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u(t) = t^x \qquad v(t) = -e^{-t}$$
$$u'(t) = xt^{x-1} \qquad v'(t) = e^{-t}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$$

Et, en 0, $u(t)v(t) \sim t^x$ donc, comme $x > 0$,

$$\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{\mathbb{R}_+^*} uv'$ et $\int_{\mathbb{R}_+^*} u'v$ sont de même nature – convergentes d'après la question 1. De plus,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $0! = 1$, et

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

  Donc $\mathcal{H}_1$.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) && \text{D'après ci-dessus} \\ &= n \times (n-1)! && \text{D'après } \mathcal{H}_n \\ &= n!\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$

3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Montrons $\mathcal{H}_0$, c'est-à-dire

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

  Posons $t = \varphi(u) = u^2$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. De plus, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.
  Donc, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\mathrm{d}u$ sont de même nature – convergente d'après la question 1.
  De plus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

  La dernière égalité est donnée par l'énoncé. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) && \text{(question 2)}\\
&= \left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} && (\mathcal{H}_n)\\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}$

4) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Comme la somme est sur l'ensemble vide, il vient $\displaystyle\sum_{k\in\emptyset}\rho_k = 0$. D'où

$$\ln(\Gamma(1)) = 0 = \int_{1/2}^{1/2}\ln t\,\mathrm{d}t + 0$$

Ainsi, $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{n+1-\frac{1}{2}}\ln t\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\rho_k &= \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\,\mathrm{d}t + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln t\,\mathrm{d}t + \rho_n + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\,\mathrm{d}t + \ln n + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k && \text{Par définition de } \rho_n\\
&= \ln\Gamma(n) + \ln n && \text{D'après } \mathcal{H}_n\\
&= \ln\Big(n\Gamma(n)\Big)\\
&= \ln\Gamma(n+1) && \text{D'après la question 1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k}$

L'indication nous guide vers une démonstration par récurrence. Mais un calcul direct de la somme donne aussi le résultat.

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Avec le changement de variable $t = k + h$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{k-1/2}^{k+1/2}\ln t\,\mathrm{d}t &= \int_{-1/2}^{1/2}\ln(k+h)\mathrm{d}h\\
&= \int_{-1/2}^{0}\ln(k+h)\mathrm{d}h + \int_{0}^{1/2}\ln(k+h)\mathrm{d}h\\
&= -\int_{1/2}^{0}\ln(k-u)\mathrm{d}u + \int_{0}^{1/2}\ln(k+h)\mathrm{d}h && \text{En posant } u=-h\\
&= \int_{0}^{1/2}\ln(k-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1/2}\ln(k+t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De plus, $\ln k = \displaystyle\int_0^{1/2} 2\ln k \,\mathrm{d}t$, donc

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)\right)\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour $t \in [0, 1/2]$,

$$\begin{aligned} 2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t) &= -\ln\left(\frac{(k+t)(k-t)}{k^2}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\,\mathrm{d}t}$$

6) *Majorer, pour rendre l'intégrale calculable, sans être trop précis sans raison.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $u \mapsto -\ln(1-u)$ est croissante (dérivée : $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$) sur $[0, 1[$,

$$\forall t \in [0, 1/2], \qquad 0 \leqslant -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \rho_k \leqslant -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

De plus, $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{4k^2}\right) \sim \dfrac{1}{4k^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison (séries positives), $\sum -\dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{1}{4k^2}\right)$ converge.

Donc, par théorème de majoration des séries positives,

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k \text{ converge}}$$

7) Notons $\ell = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k \in \mathbb{R}$ la limite obtenue à la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ell + o(1)$.

D'après la question 4,

$$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \ell + o(1)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t &= \Big[t\ln t - t\Big]_{1/2}^{n-1/2} \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + K_1 \end{aligned}$$

Où $K_1 \in \mathbb{R}$ est une constante. De plus,

$$\begin{aligned}\ln\Big(n-\frac{1}{2}\Big) &= \ln n + \ln\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)\\ &= \ln n - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad \text{Développement limité de } \ln(1+u)\end{aligned}$$

Ainsi, *(nous avons déjà vu en TD le DL qui perd un ordre via le $(n-1/2)$ en facteur : Stirling...)*

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(\ln n - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\ &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln n - \frac{1}{2} + o(1) \qquad \textit{Il vous faut le } o\Big(\frac{1}{n}\Big) \textit{ à la ligne précédente}\end{aligned}$$

Ainsi, avec $c = \ell + K_1 - 1/2 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}, \quad \ln\Gamma(n) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln n - n + c + o(1)}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\Gamma(n) - \left(\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln n - n + c\right) = 0$. Par continuité de la fonction exponentielle en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln\Gamma(n) - \left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n)}{n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}e^{c}} = 1$$

Ce qui signifie

$$\boxed{\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

8) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $t = \varphi(u) = nu$, où φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, de $]0,1]$ dans $]0,n]$. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\Gamma_n(x)$ et $\int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n\, n\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, convergentes car on admet la convergence de $\Gamma_n(x)$. De plus, elles sont égales :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^1 n^x u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u}$$

9) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall x > 0,\ \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Soit $x > 0$.

$$\int_0^1 u^{x-1}\,\mathrm{d}u = [\frac{u^x}{x}]_0^1 = \frac{1}{x} = \frac{0!}{\prod\limits_{k=0}^{0} x+k}$$

  D'où $\mathcal{H}_0$.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $x > 0$. Posons, pour tout $t \in]0,1]$,

$$\begin{aligned} f(u) &= u^x/x & \qquad g(u) &= (1-u)^{n+1}\\ f'(u) &= u^{x-1} & \qquad g'(u) &= -(n+1)(1-u)^n\end{aligned}$$

  Les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. En $u = 0$, $f(u)g(u) \sim -u^x/x \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ car $x > 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_{]0,1]} f'g$ et $\displaystyle\int_{]0,1]} fg'$ sont de même nature – convergentes d'après la question 8. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^x}{x}(n+1)(1-u)^n\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{n+1}{x}\int_0^1 u^x(1-u)^n\,\mathrm{d}u && \text{Car } n+1>0 \text{ et } x>0 \\
&= \frac{n+1}{x}\,\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)} && \text{D'après } \mathcal{H}_n \text{ en } x+1 \\
&= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Autre calcul : sans intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n(1-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u - \int_0^1 u^x(1-u)^n\,\mathrm{d}u && \textit{Linéarité – les intégrales convergent par hypothèse} \\
&= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)} && \textit{D'après } \mathcal{H}_n \textit{ en } x \textit{ et } x+1 \\
&= \frac{n!(x+1+n-x)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \\
&= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)}
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \quad \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

On s'affranchit du n^x dans la récurrence, ce qui permet de partir de $n=0$ et donc une rédaction plus concise. Il est nécessaire d'inclure le $\forall x>0$ dans l'hypothèse de récurrence, car on applique $\mathcal{H}_n$ en $x+1$.

Finalement, d'après la question 8,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x>0,\quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

10) Majoration : Montrons que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in]0,n],\qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$$

Posons $g(u)=1+u-e^u$ pour tout $u\in\mathbb{R}$. Comme $g'(u)=1-e^u$ et $g''(u)=-e^u<0$, g' est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or $g'(0)=g(0)=0$:

u	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$\searrow$	0	$\searrow$	
$g'(u)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$g(u)$		$-$	0	$-$	

D'où, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) \leqslant 0$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, n]$, avec $u = -t/n$, il vient

$$0 \leqslant 1 - \frac{t}{n} \leqslant e^{-t/n}$$

Comme $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ *(c'est ici que l'hypothèse $t \leqslant n$ est nécessaire)*,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, n], \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$$

On peut aussi passer au ln *et montrer $n \ln(1 - t/n) \leqslant -t$, ce qui vient de $\ln(1 + u) \leqslant u$ sur $]-1, +\infty[$, inégalité de convexité classique. Faites ce qui le plus naturel pour vous.*

Théorème de convergence dominée : Soit $x > 0$. Posons

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \varphi(t) = t^{x-1} e^{-t}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \mathbb{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Convergence simple : Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour $n > t$, $\mathbb{1}_{]0,n[}(t) = 1$ et

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \\ &= t^{x-1} e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} && \text{Or } \ln(1-u) = -u + o(u) \\ &= t^{x-1} e^{n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= t^{x-1} e^{-t + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t^{x-1} e^{-t} \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f = \varphi$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Intégrabilité : La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1.
- Majoration : D'après ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant f_n \leqslant \varphi$$

Conclusion : D'après le théorème de convergence dominée, f_n et $f = \varphi$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)}$$

En remplaçant par l'expression de $\Gamma_n(x)$ trouvée à la question 9, il vient

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

11) Soit $x > 0$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \Gamma(x+n) = \left[\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)\right] \Gamma(x)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie, le produit vide valant 1.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+n+1) &= (x+n)\Gamma(x+n) && \text{D'après la question 2}\\
&= \left[\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right]\Gamma(x) && \text{D'après } \mathcal{H}_n
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \Gamma(x+n) = \left[\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right]\Gamma(x)}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} &= \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x)}{(n-1)!n^x}\\
&= \frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{n!n^x} \times \frac{n}{x+n}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{n}{x+n} \sim 1$, et, d'après la question 10, comme $\Gamma(x) \neq 0$, $\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \sim \Gamma(x)$. Conclusion

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1}$$

Calcul de e^c. Utilisons le résultat de la question 3 :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

D'après ci-dessus, en $x = 1/2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)n^{1/2}} = 1$$

Or *(attention, trouver la constante dans Stirling est toujours « un peu » calculatoire...)*

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)n^{1/2}} &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!\Gamma(n)n^{1/2}}\\
&= \frac{2n\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{2^{2n}n\Gamma(n)^2 n^{1/2}}\\
&\sim \frac{e^c(2n)^{2n-1/2}e^{-2n}\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}e^{2c}n^{2n-1}e^{-2n}n^{1/2}}\\
&\sim e^{-c}\sqrt{\pi}\frac{2^{2n-1/2}n^{2n-1/2}}{2^{2n-1}n^{2n-1/2}}\\
&\sim e^{-c}\sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, $e^{-c}\sqrt{2\pi} = 1$, puis

$$\boxed{e^c = \sqrt{2\pi}}$$

Exercice 2 (Centrale PC 2024)

Partie 1 (Résultats préliminaires)

1) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $|1+x_1-1| = |x_1| = 1+|x_1|-1$. D'où $\mathcal{H}_1$. *($\mathcal{H}_0$ est vraie aussi)*
- $\underline{\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
  En développant $(1+x_{n+1})$, il vient

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) + x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1+x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \\
&\leqslant \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| + |x_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1+|x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) && \mathcal{H}_n \text{ et inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+|x_k|)\right)-1 && \text{Factorisation}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1}$

2) En posant $g(x) = 1+x-e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$, on prouve (cf exercice 1, question 10) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+x \leqslant e^x$$

Soit $(x_1,\dots,x_n) \in [-1,+\infty[^n$.

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}$$

Partie 2 **1)** Pour tout $t \in \mathbb{C}$, le développement en série entière de l'exponentielle s'écrit

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$$

Soit $t \in \mathbb{C}$ fixé.

$$\begin{aligned}
\left|1+t-e^t\right| &= \left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^{k+2}}{(k+2)!} && \textit{(Les sommes usuelles commencent à 0)} \\
&\leqslant |t|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} && \text{Car } (k+2)! \geqslant k! \\
&\leqslant |t|^2 e^{|t|}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{C}, \quad |(1+t)-\mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2\mathrm{e}^{|t|}}$$

2) Identité remarquable :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \qquad \textit{(écrire avec des « ... » : mêmes puissances, télescopage)}\\ &= a^n - b^n\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Majoration :

$$\begin{aligned}|a^n - b^n| &= |a-b|\left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right|\\ &\leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k} \qquad \text{Or } |a| \leqslant M \text{ et } |b| \leqslant M\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M^{k+n-1-k}\,|a-b|\\ &\leqslant nM^{n-1}\,|a-b|\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons le résultat de la question 1 à $t = z/n \in \mathbb{C}$:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right) - e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant \left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\left|\frac{z}{n}\right|}$$

De plus, le résultat de la question 2 s'écrit, avec $a = 1 + z/n$, $b = e^{z/n}$ et $M = \max(|a|, |b|)$:

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| &\leqslant nM^{n-1}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right) - e^{\frac{z}{n}}\right|\\ &\leqslant M^{n-1}\frac{|z|^2}{n} e^{\frac{|z|}{n}} \qquad \text{D'après ci-dessus}\end{aligned}$$

Calcul de M : Soit $t = z/n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}|1+t| &\leqslant 1 + |t|\\ &\leqslant e^{|t|} \qquad \text{D'après la question 2 de la partie 1}\end{aligned}$$

Or, de plus, $\Re(t)^2 \leqslant \Re(t)^2 + \Im(t)^2 = |t|^2$, donc $|\Re(t)| \leqslant |t|$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|e^t\right| &= \left|e^{\Re(t)} e^{i\Im(t)}\right|\\ &= e^{\Re(t)}\\ &\leqslant e^{|\Re(t)|}\\ &\leqslant e^{|t|} \qquad \text{D'après ci-dessus}\end{aligned}$$

Donc $M = \max\left(|1+t|, |e^t|\right) \leqslant e^{|t|}$

Conclusion :

$$\boxed{\left|\left(1+\frac{z}{n}\right) - e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant e^{\frac{|z|}{n}(n-1)}\frac{|z|^2}{n} e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}}$$

4) D'après la question précédente,

$$|u_n - e^z| \leqslant \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc, par majoration,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \text{ converge vers } \mathrm{e}^z}$$

Partie 3 (Exemples de calcul de produit infini)

1) $$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{n=2}^{N}(n-1) \prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\left(\displaystyle\prod_{n=2}^{N} n\right)^2}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{n=1}^{N-1} n \prod_{n=3}^{N+1} n}{(N!)^2}$$

$$= \frac{(N-1)!(N+1)!}{2(N!)^2}$$

$$= \frac{N+1}{2N} \sim \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$$

Et pour $N \geqslant 2$, en séparant le produit pour $n = 2k$ (où $n + (-1)^{n+1} = 2k - 1$) et pour $n = 2k - 1$ (où $n + (-1)^{n+1} = 2k$), il vient :

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{n=2}^{2N} \left(n + (-1)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(2N)!} \prod_{k=1}^{N} (2k-1) \prod_{k=2}^{N} (2k)$$

$$= \frac{(2N)!}{2(2N)!} = \frac{1}{2}$$

Il manque 2 au numérateur

Et, $$\prod_{n=2}^{2N+1} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \left(1 + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1}\right) \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2N+1}\right) \times \frac{1}{2} \sim 12$$

Donc

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}}$$

Exercice 3 (Mines-Ponts PC 2024 – corrigé UPS)

Début de la partie 1

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale en $|x|$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant |P(x)| \quad \text{avec} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$$

Notons $C = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1$, par l'inégalité triangulaire : *(distinguer les cas $|x| \leqslant 1$ et $|x| > 1$ est assez classique)*

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k| = C \leqslant C(1+|x|^d) \end{aligned}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > 1$, si $k \in [\![0, d]\!]$, $|x|^k \leqslant |x|^d$; donc par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^d = C|x|^d \leqslant C(1+|x|^d) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant |P(x)| \leqslant C(1+|x|^d)$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est à croissance lente}}$$

Autre rédaction possible : *(autre rédaction en étudiant les limites en $\pm\infty$ à l'aide de l'équivalent $P(x) \sim a_d|x|^d$)*
On a $P(x) \underset{|x|\to+\infty}{\sim} a_d|x|^d$ donc $\lim_{|x|\to+\infty} \dfrac{|P(x)|}{1+|x|^d} = |a_d|$: la fonction continue $x \mapsto \dfrac{|P(x)|}{1+|x|^d}$ possède une limite finie en $\pm\infty$ donc elle bornée sur $\mathbb{R}$.
Cette dernière propriété n'étant pas explicitement dans le programme officiel, il faudrait rédiger un peu plus précisément :
$\lim_{|x|\to+\infty} \dfrac{|P(x)|}{1+|x|^d} = |a_d|$ donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $|x| \geqslant A$, $\dfrac{|P(x)|}{1+|x|^d} \leqslant |a_d| + 1$.
Et $x \mapsto \dfrac{P(x)}{1+|x|^d}$ est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle est bornée sur $[-A, A]$: il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $|x| \leqslant A$, $\dfrac{|P(x)|}{1+|x|^d} \leqslant K$.
On a alors en posant $C = \max(|a_d| + 1, K)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant C(1+|x|^d)$.

2) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.
La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $f\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ par produit de fonctions continues.
Soit $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant C(1+|x|^k)$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)\varphi(x)| \leqslant C(1+|x|^k)\varphi(x)$$

On a, par croissance comparée, *(comparaison classique … $\underset{|x|\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$)*

$$Cx^2(1+|x|^k)\varphi(x) \sim C|x|^{k+2}e^{-x^2/2} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$$

Donc $C(1+|x|^k)\varphi(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et par majoration

$$f(x)\varphi(x) \underset{|x|\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$ (intégrale de Riemann, $\alpha = 2 > 1$, parité), donc $f\varphi$ est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$ d'où $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est à dire :*(les résultats des questions 1 et 2 vont être très utiles dans les questions qui suivent pour justifier l'intégrabilité de certaines fonctions)*

$$\boxed{f \in L^1(\varphi)}$$

3)
- la fonction nulle appartient à $CL(\mathbb{R})$.
- Soit f, g deux fonctions appartenant à $CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Soit $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant C_f\left(1+|x|^{k_f}\right) \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant C_g\left(1+|x|^{k_g}\right)$$

  Alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\alpha f(x)+g(x)| &\leqslant |\alpha f(x)| + |g(x)| \\ &\leqslant |\alpha| C_f\left(1+|x|^{k_f}\right) + C_g\left(1+|x|^{k_g}\right)\end{aligned}$$

  Donc $\alpha f + g$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ donc d'après la question 1, $\alpha f + g \in CL(\mathbb{R})$. *(la stabilité par combinaison linéaire s'obtenait assez facilement en utilisant la question 1)*

$CL(\mathbb{R})$ est donc stable par combinaison linéaire, et non vide ; $CL(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- *Stabilité de $CL(\mathbb{R})$ pour le produit.* Soit $f, g \in CL(\mathbb{R})$. On garde les notations précédentes, $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)g(x)| \leqslant C_f C_g\left(1+|x|^{k_f}\right)\left(1+|x|^{k_g}\right)$$

Donc *(l'utilisation de la question 1 était encore utile ici)* fg est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$, d'où, d'après la question 1, $fg \in CL(\mathbb{R})$.

$$\boxed{CL(\mathbb{R}) \text{ est un espace vectoriel stable par produit}}$$

4) $\underline{P_t \text{ est bien définie sur } C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})}$: Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons $g_x : y \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)$. Montrons que $g_x \in L^1(\varphi)$.
On a $g_x \in C^0(\mathbb{R})$ par composée de fonctions continues, f étant continue.
De plus, f appartenant $CL(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g_x(y)| \leqslant C\left(1+\left|e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right) \leqslant C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)$$

Donc g_x est majorée par une fonction polynômiale en $|y|$ donc g_x est à croissante lente d'après la question 1.
Donc $g_x \in C^0 \cap CL(\mathbb{R})$, donc, d'après la question 2,

$$g_x \in L^1(\varphi)$$

Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ est convergente, ce qui montre que

$$\boxed{P_t(f)(x) \text{ est bien définie pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Linéarité de P_t. Soit $f, g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale – toutes les intégrales sont convergentes :

$$\begin{aligned}
P_t(\alpha f + g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f + g)\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \alpha P_t(f) + P_t(g)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_t \text{ est linéaire}}$$

5) Commençons par justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$.

f' et g' sont continues et à croissante lente donc d'après la question 3, $f'g'$ est à croissance lente (et continue par produit de fonctions continues) : $f'g' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $f'g' \in L^1(\varphi)$ d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$.

On va effectuer une intégration par parties en remarquant que $(f'\varphi)' = L(f)\varphi$. *(attention à bien justifier la convergence de l'une des deux intégrales, et étudier le crochet pour pouvoir effectuer l'intégration par parties)*
On a $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f'(x)\varphi(x)g(x) = 0$ par croissance comparée car $f'g \in CL(\mathbb{R})$ par produit de fonctions à croissance lente.
Par conséquent, par le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'g$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi g'$ sont de même nature (convergente) et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f'\varphi\right)'(x)g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[f'(x)\varphi(x)g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$