# Devoir de Mathématiques numéro 1

---

## Exercice 1 (Équivalent de Stirling)

**1)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

**2)** Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

**3)** On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

**4)** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\ \mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k\,.$$

*On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des $\rho_k$ est nulle.*

**5)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)\ \mathrm{d}t\,.$$

**6)** En déduire que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

**7)** Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$ :

$$\ln\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1).$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$ :

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\,.$$

**8)** Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u\,.$$

**9)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall x > 0,\ \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

**10)** (5/2) On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbb{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in ]0,n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$ :

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$ :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

**11)** Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où $c$ est défini à la question **Q7**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions* **Q1** *et* **Q2**.

## Exercice 2 (Extraits de Centrale)

Cet exercice est incomplet, donc toutes les questions préliminaires ne servent pas forcément dans la suite de l'exercice.

### Partie 1 (Résultats préliminaires)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

**1)** Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left( \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left( \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

**2)** Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left( \sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

### Partie 2

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{e}^z$.

**1)** *Question réservée aux 5/2. Pour les 3/2, admettre le résultat.* Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

**2)** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Montrer que $a^n - b^n = (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$. En déduire que $|a^n - b^n| \leqslant n M^{n-1} |a - b|$.

**3)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left| \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z \right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n} \mathrm{e}^{|z|}$.

**4)** Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\mathrm{e}^z$.

### Partie 3 (Exemples de calcul de produit infini)

**1)** Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

*On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de* $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

## **Exercice 3** (Extraits de Mines-Ponts)

**Notations et résultats admis**

- Soit la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$
- Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on pose $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note $CL(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à croissance lente, c'est-àdire :
  $CL(\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant C\left(1+|x|^k\right)\right\}$
- On note $L^1(\varphi) = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbb{R}\right\}$ ;
- Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

- Pour $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

- Une fonction $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k|x|^k$

**Début de la partie 1**

**1)** Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

**2)** Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

**3)** Montrer que $CL(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbb{R})$ est stable par produit.

**4)** Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et vérifier que $P_t$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.

**5)** Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que les fonctions $f,\ f',\ f''$ et $g$ soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$