

Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

1) Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}$.

2) Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

b) Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

5) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto e^{i\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\varphi'(x)e^{i\varphi(x)}$.

a) (5/2) Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(3/2) On admettra que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = i\int_0^1 e^{ix(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u.$$

6) Convergence d'intégrales

a) Montrer que les intégrales $\int_0^{\pi} \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\int_0^{\pi} \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

b) En effectuant une intégration par parties, montrer que $\int_{\pi}^{+\infty} \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

d) Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\mathrm{d}v$ converge.
On pourra effectuer un changement de variables.

7) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

b) On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variables affine $t = u - n\pi$.

c) Prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

d) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.
On pourra utiliser les questions de cours.

e) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

8) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$$

On pourra utiliser la question 5b

9) On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
On pourra utiliser la question 6.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ lorsque ceci a un sens.

1) Justifier que $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ est inclus dans le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ et donner l'expression de f'.

3) **a)** Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction ln au voisinage de 1.
Indication : *On pourra poser $x = 1 + t$, avec $t \to 0$.*

b) Justifier alors que $\displaystyle\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_1(1)$.
Indication : *Utiliser t. Ne revenir à des formules en fonction de x qu'à la dernière ligne.*

c) En déduire que les fonctions f' et $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

4) Étude de f au voisinage de 1 :

a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\}$,

$$\left|\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right| \leqslant \frac{3}{2}$$

b) En déduire que, pour tout $x \in]\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1+\alpha}[\backslash\{1\}$,

$$|f(x) - \ln(1+x)| \leqslant \frac{3}{2}|x^2 - x|$$

puis trouver la limite de f en 1.

c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f ce prolongement. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$. On énoncera le théorème utilisé.

5) Étude de f au voisinage de 0 :

a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

b) On note encore f ce prolongement. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

6) Étude de f au voisinage de $+\infty$: Déterminer la limite de f en $+\infty$.

7) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

8) À l'aide du signe de f'', montrer que f est convexe.

9) Tracer la courbe représentative de f.

10) Calcul d'une intégrale.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que, $\forall (x,y) \in]0,1[^2$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u$ et en déduire que $\displaystyle f(y) - f(x) = \int_x^y \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.