Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 7 octobre 2021

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (TPC 2019)

1) **a)** Pour tout $t \in]-1, +\infty[$, posons $\varphi(t) = \ln(1+t) - t$.

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$$

Donc $\varphi'(t)$ est du signe de $-t$, et le tableau de variations de φ s'écrit

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, $\varphi \leqslant 0$ et en conclusion :

$$\boxed{\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+t) \leqslant t}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Première inégalité : Soit $x \in [0, \sqrt{n}[$.
Comme $-\dfrac{x^2}{n} \in]-1, 0] \subset]-1, +\infty[$, l'inégalité de la question 1 s'applique et nous donne

$$\begin{aligned}
& & \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) &\leqslant -\frac{x^2}{n} & \\
&\Longrightarrow & n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) &\leqslant -x^2 & \text{Car } n > 0 \\
&\Longrightarrow & e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n &\leqslant e^{-x^2} & \text{Car } exp \text{ est croissante}
\end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie pour $x = \sqrt{n}$: $0 \leqslant e^{-n}$.
Seconde inégalité : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $\dfrac{x^2}{n} \geqslant 0$, l'inégalité de la question 1 s'applique et nous donne de même

$$\begin{aligned}
& & \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) &\leqslant \frac{x^2}{n} \\
&\Longrightarrow & -n\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) &\geqslant -x^2 \\
&\Longrightarrow & e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} &\geqslant e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}}$$

L'inégalité de droite est encore vraie sur $\mathbb{R}_+$.

c) *C'est quasiment une des questions de cours. Nous verrons au chapitre suivant que c'est un résultat de convergence simple.*

- Pour n assez grand, $1 - \dfrac{x^2}{n} > 0$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \\ &= e^{n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{Développement limité de } \ln(1-u) \\ &= e^{-x^2 + o(1)}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}}$$

- De même, comme $1 + \dfrac{x^2}{n} > 0$,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} &= e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{Développement limité de } \ln(1+u) \\ &= e^{-x^2 + o(1)}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}}$$

d) *Comment commencer ? D'abord, les fractions, c'est le Mal : partir du résultat et essayer d'obtenir une expression sans fractions, autant que possible. Ensuite, on peut tout passer d'un côté et se ramener à une étude de signe. Puis on rédige tout ça dans le bon ordre : la conclusion en dernier.*

Posons, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

La fonction φ est dérivable,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2x - 2x\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \\ &= 2x\left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Pour $x > 0$, $1 + \dfrac{x^2}{n} > 1$ donc la parenthèse est négative, et le tableau de variation de φ s'écrit

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0 $\quad -$	
φ	0 $\searrow$	

Donc pour tout $x \geqslant 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$. Ainsi,

$$0 < 1 + x^2 \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

En passant à l'inverse, il vient,

$$\boxed{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}}$$

On peut aussi utiliser, en étant moins systématique, la formule du binôme,

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = 1 + x^2 + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{x^2}{n}\right)^k}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + x^2$$

2) **a)** Pour tout $X > 0$, $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{Arctan} X \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}$$

b) D'après 1)b) et 1)d),

$$\forall x > 0, \qquad 0 < e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$$

Or d'après a), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Donc, par majoration,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

De plus, en intégrant l'inégalité précédente et vu le calcul du a),

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}}$$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé*. La fonction $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, $f \geqslant 0$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : $1 + \dfrac{x^2}{n} \sim \dfrac{x^2}{n}$, donc *(J'insiste : n* **fixé***)*

$$f(x) \sim \frac{(x^2)^{-n}}{n^{-n}} = \frac{n^n}{x^{2n}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ converge (Riemann, $2n \geqslant 2 > 1$),
Donc, par comparaison,

$$\boxed{\text{Les intégrales généralisées } v_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \text{ convergent}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'encadrement obtenu en 1)b) entre 0 et $\sqrt{n}$, il vient

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}x}_{u_n} \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x}_{I_n} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

Or $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geqslant 0$ sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Donc $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \geqslant 0$, puis

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \ \leqslant\ \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \ =\ v_n$$

Conclusion :

$$\boxed{u_n \leqslant I_n \leqslant v_n}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons le changement de variables $x = \sqrt{n}\sin t$: La fonction $t \mapsto \sqrt{n}\sin t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante de $[0, \pi/2]$ dans $[0, \sqrt{n}]$, et $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\cos t\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{(\sqrt{n}\sin t)^2}{n}\right)^{n} (\sqrt{n}\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{u_n = \sqrt{n} W_{2n+1}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Attention, intégrale généralisée : théorème de changement de variables à invoquer.*
La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{n}\tan t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante (donc bijective) de $[0, \pi/2[$ dans $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi'(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}$.

Donc, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{(\sqrt{n}\tan t)^2}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, donc convergentes puisque la première l'est d'après 3)a), et

$$\begin{aligned}
v_n &= \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{(\sqrt{n}\tan t)^2}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\tan^2 t\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t && \text{Or } 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan' t \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{v_n = \sqrt{n} W_{2n-2}}$$

5) L'énoncé nous rappelle que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, donc

$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'où $u_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après 4)a), et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même, $W_{2n-2} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc, d'après 4)b),

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi, grâce à l'encadrement obtenu en 3)b), la suite (I_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 2 (D'après Mines-Ponts PC 2017)

Partie 1 (Exponentielle tronquée)

1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence : Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 t^n e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $t^n e^{-t} = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n = n!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Intégrons par parties : avec $u = t^{n+1}$ et $v = -e^{-t}$, comme $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$, le théorème d'intégration par partie nous dit que les deux intégrales qui suivent sont de même nature. Comme I_{n+1} converge d'après ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t^{n+1} \times (-e^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1) t^n (-e^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1) I_n \\ &= (n+1)! \qquad\qquad \text{(d'après } \mathcal{H}_n\text{)} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ I_n = n!.}$

2) $e^{nx} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$ existe d'après l'énoncé. $T_n(x)$ est une somme finie, donc

$$\boxed{R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) \text{ existe et } T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}.}$$

3) **a)** Soit I un intervalle contenant 0. Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathcal{H}_n$: Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: $\forall x \in I \quad f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I. D'après $\mathcal{H}_n$, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : Pour tout $n \geqslant 0$, pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I,

$$\boxed{\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

b) Soit $f(x) = e^{nx}$ pour tout $x \in I = \mathbb{R}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = n^k e^{nx}$$

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{nx} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} n^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t \\
&= T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{n(x-u)}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u = x - t)
\end{aligned}$$

Or $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x)$ d'après 2). Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u}$$

4) **a)** Simplifions puis passons à l'exponentielle.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2}\, M^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^{n+1}\, M^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} M \\
&= e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} M \qquad \text{Or } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= e^{\frac{n+1}{n} + o(1)} M
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Me}$$

b) Si $0 < M < e^{-1}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = Me < 1$.

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum a_n$ converge absolument.

En particulier le terme général de cette série tend nécessairement vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

c) Soit $\varphi(u) = ue^{-u}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = (1-u)e^{-u}$, d'où le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Comme $x \in]0,1[$, le maximum de φ sur $[0,x]$ est atteint en x et vaut

$$\boxed{M = \max_{u\in[0,x]} ue^{-u} = xe^{-x} < e^{-1}}$$

d) Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après 3)b), $R_n(x) = e^{nx}\dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$. Or

$$0 \leqslant \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^x \sup_{u\in[0,x]} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$$

Comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\sup_{u\in[0,x]} (ue^{-u})^n = \left(\sup_{u\in[0,x]} ue^{-u}\right)^n$. Puis d'après 3)c),

$$0 \leqslant \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u \leqslant xM^n$$

Ainsi

$$\left|R_n(x)e^{-nx}\right| \leqslant x\frac{n^{n+1}}{n!}M^n = xa_n$$

Or d'après 3)a), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x)e^{-nx} = 0$. Finalement :

$$\boxed{R_n(x) = o(e^{nx})}$$

De plus, d'après 2), $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx})$, donc

$$\boxed{T_n(x) \sim e^{nx}}$$

5) D'après la question 1, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$. Le théorème de changement variable, avec $u \mapsto t = nu$ $\mathscr{C}^1$ strictement croissante et bijective de $[0,+\infty[$ dans lui-même ($n > 0$), nous donne

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (nu)^n e^{-nu} n \,\mathrm{d}u = n^{n+1} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}t$ converge aussi et

$$\begin{aligned}\int_0^x (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u - \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{n!}{n^{n+1}} - \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or } T_n(x) &= e^{nx} - R_n(x) && \text{(d'après la question 2)} \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\frac{n!}{n^{n+1}} - \int_0^x (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u \right) && \text{(d'après la question 3)b)}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u}$$

6) Soit $x > 1$. Pour tout $u \geqslant x$, par décroissance de φ sur $[x, +\infty[\subset [1, +\infty[$,

$$\boxed{(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}}$$

7) Soit $x > 1$. Comme ue^{-u} est intégrable sur $[0, +\infty[$ (question 1), on majore dans l'égalité trouvée au 5 grâce à l'inégalité du 6 :

$$\begin{aligned}0 \leqslant \frac{T_n(x)}{e^{nx}} &= \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u && \text{(d'après la question 5)} \\ &\leqslant \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u} \, \mathrm{d}u && \text{(d'après la question 6)} \\ &\leqslant K \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^{n-1} && \left(\text{avec } K = \int_x^{+\infty} ue^{-u} \, \mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant \frac{K}{M} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n && \text{(avec } M = xe^{-x} < e^{-1}\text{, d'après 4.c)}\end{aligned}$$

Or d'après la question 4.b, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n = 0$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n(x)}{e^{nx}} = 0$, puis

$$\boxed{T_n(x) = o(e^{nx})}$$

Partie 2 (Méthode de Laplace)

1) D'après H1 et H3, f admet un maximum en $x = 0$, donc la dérivée s'annule en $x = 0$:

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1, 1]$, donc elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) && \text{(car } f(0) = 1,\ f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) = -1)\end{aligned}$$

Ainsi, en composant les développements limités *(comme d'habitude)*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{x^2} \ln\left(f(x)\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) && \text{(car } \ln(1+u) = u + o(u)) \\ &= \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{k = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}$$

2) Minoration de φ :

- Supposons $f(1)$ et $f(-1)$ non nuls. Alors $f > 0$ sur $[-1,1]$ et φ se prolonge par continuité en 1 et -1, en posant
$$\forall x \in \{-1,1\}, \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(f(x))$$
La fonction φ ainsi prolongée est continue sur le segment $[-1,1]$, donc est bornée et atteint ses bornes. Soit $a = \varphi(x_0)$ son minimum, où $x_0 \in [-1,1]$.
D'après H3 et H4, $f < 1$ sur $[-1,1]\backslash\{0\}$, Ainsi $\ln \circ f < 0$ sur cet ensemble, puis
$$\forall x \in [-1,1]\backslash\{0\}, \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(f(x)) > 0$$
Comme $\varphi(0) = 1/2 > 0$ par construction, $\varphi > 0$ sur $[-1,1]$. En particulier $a = \varphi(x_0) > 0$.
- Supposons $f(1) = 0$ et $f(-1) = 0$. Alors, par continuité de f en 1, $\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{1}{x^2}\ln(f(x)) = +\infty$. Donc, par définition de la limite, il existe $\beta \in [0,1[$ tel que
$$\forall x \in [\beta, 1[, \qquad \varphi(x) \geqslant 1$$
Comme $\varphi(0) = 1/2$, le minimum de φ n'est pas atteint sur $[\beta,1[$.
De même en -1 : $\lim\limits_{x\to -1} \varphi(x) = +\infty$ et il existe $\alpha \in]-1,0[$ tel que
$$\forall x \in]-1,\alpha], \qquad \varphi(x) \geqslant 1$$
et le minimum de φ n'est pas atteinte sur $]-1,\alpha]$.
Sur le segment $[\alpha,\beta]$, la fonction φ est continue donc bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [\alpha,\beta]$ tel que $a = \varphi(x_0)$ soit le minimum de φ sur $[\alpha,\beta]$, et donc sur $]-1,1[$.
Comme $f < 1$ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$, $\varphi > 0$ sur $]-1,1[$, et ainsi $a = \varphi(x_0) > 0$.
- Si seul $f(1)$ ou $f(-1)$ s'annule, on combine les deux points précédents, pour le même résultat : $a > 0$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est minorée sur }]-1,1[\text{ par } a > 0}$$

Majoration de f : Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
& \varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(f(x)) \geqslant a & \\
\Longrightarrow \quad & \ln(f(x)) \leqslant -ax^2 & \qquad (\text{car } -x^2 \leqslant 0) \\
\Longrightarrow \quad & f(x) \leqslant e^{-ax^2} & \qquad (\text{car exp est croissante})
\end{aligned}$$

Or f est continue en 1 et en -1, donc, par passage à la limite,

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad f(x) \leqslant e^{-ax^2}}$$

3) Continuité par morceaux : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Hors de $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, la fonction g_n est constante donc prolongeable en $x = \pm\sqrt{n}$.
Pour $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, $\dfrac{u}{\sqrt{n}} \in [-1,1]$, donc $u \mapsto f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n$ est définie et continue sur $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ comme composée de fonctions continues. Ainsi,

$$\boxed{\text{Chaque fonction } g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}}$$

Convergence simple : Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé.
Avec $n_0 = \lfloor u^2 \rfloor + 1$, pour tout $n \geqslant n_0$, $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} g_n(u) &= \left[f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right]^n && \text{Or } \frac{u}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ &= \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2 + o(1/n) \right]^n && \text{(développement limité de } f \text{ en 0 obtenu à la question 1)} \\ &= \exp\left(n \ln \left[1 - \frac{u^2}{2n} + o(1/n) \right] \right) && \textit{(toujours passer à l'exponentielle dans ce genre de cas)} \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} + o(1) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(u) = e^{-u^2/2}$:

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_{n \geqslant 1} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-u^2/2} \end{array}}$$

4) D'après la question 5 de l'exercice 1,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En effectuant le changement de variable $x = t/\sqrt{2}$, $\mathscr{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Puis, par parité,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$$

5) Appliquons le théorème de convergence dominée à (g_n).
Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(u) = e^{-au^2}$. D'après la question précédente, à l'aide du changement de variable $t = u\sqrt{a}$, ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
D'après 2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$,

$$\begin{aligned} g_n(u) &= \left[f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right]^n \\ &\leqslant \left[e^{-a(u/\sqrt{n})^2} \right]^n \\ &\leqslant e^{-au^2} = \psi(u) \end{aligned}$$

Donc, comme g_n est nulle hors de $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, $0 \leqslant g_n \leqslant \psi$. Ainsi,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La suite (g_n) converge simplement vers $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
- La fonction $\psi : u \mapsto e^{-au^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |g_n| \leqslant \psi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, les g_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

Comme $\sqrt{2\pi}\neq 0$, la limite ci-dessus s'écrit : $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}}\left[f\Big(\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)\right]^n\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{2\pi}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, effectuons le changement de variable $u = x\sqrt{n}$, où $u\mapsto u/\sqrt{n}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ dans $[-1,1]$:

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}}\left[f\Big(\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)\right]^n\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_{-1}^{1}[f(x)]^n\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent,

$$\boxed{\int_{-1}^{1}(f(x))^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1}(f(x))^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

Partie 3 (Formule de Stirling)

1) On a, par Chasles,

$$\begin{aligned}
I_n + J_n &= \int_{-1}^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{0}^{+\infty} u^n e^{-nu+n}\,\mathrm{d}u && \text{(changement de variable } u = x+1)\\
&= e^n\int_{0}^{+\infty} u^n e^{-nu}\,\mathrm{d}u\\
&= e^n\int_{0}^{+\infty}\frac{t^n}{n^n}e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{n} && \text{(changement de variable } t = nu)\\
&= e^n\frac{n!}{n^{n+1}} && \text{(d'après la question 5 de la partie 1)}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{n! = e^{-n}n^{n+1}(I_n+J_n)}$.

2) La fonction $x\mapsto x\ln(2)-\ln(x+1)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ de dérivée égale à $x\mapsto \ln 2 - \dfrac{1}{x+1}$.
Or, pour $x\geqslant 1$,

$$\ln 2 - \frac{1}{x+1}\geqslant \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$

La fonction $x\mapsto x\ln(2)-\ln(x+1)$ est donc croissante sur $[1,+\infty[$. Etant nulle en $x=1$, on a donc

$$\forall x\geqslant 1,\qquad x\ln(2)\geqslant \ln(x+1)$$

et donc

$$\forall x\geqslant 1,\qquad 2^x\geqslant x+1.$$

On en déduit que

$$\underline{0\leqslant J_n\leqslant}\int_{1}^{+\infty}2^{nx}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty}e^{n(\ln 2-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{n(\ln(2)-1)}}{n(1-\ln(2))} = \underline{\left(\frac{2}{e}\right)^n\frac{1}{n(1-\ln(2))}}.$$

3) Considérons la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.
Elle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, à valeurs > 0 sur $]-1,1]$, de dérivée égale à $x \mapsto -xe^{-x}$. Elle possède un maximum en 0 où elle vaut bien 1 (H1, H3, H4) et on aussi $f''(0) = -1$ (H2).
Ainsi, d'après la question 5 de la partie 2,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}.$$

4) Comme $2/e < 1$, on déduit des questions 2) et 3) de la partie 4 que $J_n = o(I_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Et donc de la question 1) que

$$\begin{aligned} n! &\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^{n+1}I_n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n n\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \end{aligned}$$