Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) **a)** Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant 1 &\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

En intégrant le dernier encadrement il vient $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

b) D'après ci-dessus, (a_n) est décroissante minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge}}$$

c) Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc en multipliant par $t \geqslant 0$ et rajoutant 1,

$$\boxed{1+t^2 \leqslant 1+t}$$

En divisant par 2, élevant à la puissance n (tout est positif) puis en intégrant il vient

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, donc par encadrement,

$$\boxed{\ell = 0}$$

2) *En vue du concours blanc, les 3/2 sont vivement encouragé à lire la correction qui suit, après avoir réfléchit à la question.*

Appliquons le théorème de convergence dominée :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\forall t \in [0,1], \qquad f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue donc continue par morceaux sur $[0,1]$.

- <u>Convergence simple</u> : Soit $t \in [0,1]$ fixé.
  Si $t = 1$, $f_n(1) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
  Si $t \in [0,1[$, $f_n(t) = q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|q| < 1$.
  Donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto 0 \qquad \text{si } t < 1 \\ \quad 1 \mapsto 1 \end{cases}$
- <u>Domination</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$.
  L'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1+t^2}{2} \leqslant 1$ du 1)a) nous donne ainsi

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varphi(t) = 1$$

Par conséquent, la suite (f_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers f continue par morceaux et vérifie l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Avec $\varphi = 1$ intégrable sur $[0,1]$.
Ainsi, le théorème de convergence dominée nous dit que les f_n et f sont intégrables sur $[0,1]$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge vers } 0}$$

3) Appliquons le critère des séries alternées :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (déjà prouvé lors de la question 1)b)).
- D'après la question 1)a), la suite (a_n) est décroissante.
- D'après la question 1)c), la suite (a_n) converge vers 0.

Donc, d'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^n a_n \text{ converge}}$$

4) **a)** *Qui dit calcul explicite d'une série dit presque toujours série géométrique !* Pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p &= \sum_{p=0}^{n} \left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^p \\
&= \frac{1 - \left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} \\
&= \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $t \in [0,1]$, $t^2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{2}{3+t^2} \leqslant \dfrac{2}{3}$. *(Au pire on fait une étude de la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{3+t^2}$.)*
Ainsi

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t = \frac{2}{3} a_{n+1}.$$

c) $t = \sqrt{3}\,u$ donc $\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$ et, en n'oubliant pas les bornes, il vient

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{3+3u^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{Arctan}\,(0)\right)$$

Or $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ *(Vous avez le droit de faire un cercle trigo au brouillon)* donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

d) Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ tend vers 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 4)a),

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p - \frac{2}{3+t^2} = -(-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

Donc en intégrant, puis majorant les valeurs absolues à l'aide de 4)b), il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p - \frac{2}{3+t^2}\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}\end{aligned}$$

Or d'après 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc par majoration la limite, pour $n \to +\infty$, de l'expression entre valeurs absolue existe et vaut 0. Par conséquent, d'après 4)c)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Attention ! Warning ! ***On ne peut pas intervertir limite et intégrale*** *sans utiliser des théorèmes. Cf le théorème de convergence dominée appliqué au 2) et le cours qui va avec.*

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale *(bien vérifier que la somme est finie)*, il vient

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p$$

Donc d'après 4)d), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 2 (MT 2019 PC)

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus f est de signe constant au voisinage de 0 et de $+\infty$, donc la convergence équivaut à la convergence absolue.
Il n'est pas précisé que $\alpha \geqslant 0$, donc on peut très bien avoir $\alpha < 0$.

- Étude en 0 : Effectuons un développement limité, pour obtenir un équivalent de f.

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln\left(x+e^{\alpha x}\right) &= \ln(1+(1+\alpha)x+o(x)) \\ &= (1+\alpha)x+o(x)\end{aligned}$$

Puis, si $\alpha \neq -1$ *(Il faut traquer les fractions et les éventuelles divisions par* 0*. Et, dans la même famille, traquer les équivalent à* 0*.)*

$$f(x) \sim (1+\alpha)x^{1+\alpha}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (Riemann en 0). Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $1+\alpha > -1$, c'est-à-dire $\alpha > -2$.
Si $\alpha = -1$, $f(x) = o(x^{\alpha+1}) = o(1)$, donc f est prolongeable par continuité en 0 (par 0), par conséquent $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est faussement généralisée, donc converge.
En conclusion

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha > -2$$

- Étude en $+\infty$:
Comment commencer ? On part toujours de l'intérieur vers l'extérieur, donc de la parenthèse à l'intérieur du $\ln$*. C'est « exponentielle qui gagne », donc on veut montrer* $x + e^{alphax} \sim e^{alphax}$*. Pour ce faire, on met* $e^{\alpha x}$ *en facteur — comme lorsqu'on regarde des limites de fractions rationnelles.*
Pour $\alpha = 0$, $f(x) = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge grossièrement.
De même, pour $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge grossièrement.
Désormais, on suppose $\alpha < 0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = 0$,

$$\begin{aligned}\ln\left(x+e^{\alpha x}\right) &= \ln\left(x\left(1+\frac{e^{\alpha x}}{x}\right)\right) \\ &= \ln x + \ln\left(1+\frac{e^{\alpha x}}{x}\right) \\ &= \ln x + o(1)\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) \sim x^\alpha \ln x = \frac{1}{x^{-\alpha}\ln^{-1} x}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha'}\ln^\beta x}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha' > 1$ ou $\alpha' = 1$ et $\beta > 1$ (Bertrand en $+\infty$, ce n'est pas du cours). Donc, ici, il y a convergence si et seulement si $-\alpha > 1$.
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x+e^{\alpha x}\right)\,\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha \in]-2,-1[}$$

Exercice 3

Partie 1 (Préambule)

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{e^{ikb}}{ik} - f(a)\frac{e^{ika}}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)|}{k} + \frac{f(a)}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après a), $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Partie 2

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

La fonction $f_n : \begin{cases}]0,\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(2nt)}{\tan t}\end{cases}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.

<u>Étude en 0</u> : $f_n(t) \sim \dfrac{2nt}{t} = 2n$ ($\neq 0$ car $n \geqslant 1$). Donc $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 2n$ et f_n est prolongeable par continuité en $t = 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en $\frac{\pi}{2}$</u> : Soit $t = \frac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \frac{\sin(n\pi - 2nh)}{\tan(\pi/2 - h)} \\ &= (-1)^{n+1}\sin(2nh)\frac{\sin(h)}{\cos(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Donc f_n est aussi prolongeable par continuité en $t = \frac{\pi}{2}$, et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Calculons I_1 : pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2t)}{\tan t} &= \frac{\sin(2t)\cos t}{\sin t} \\ &= \frac{2\sin t\cos^2 t}{\sin t} \\ &= 2\cos^2 t \\ &= \cos(2t)+1\end{aligned}$$

Donc $I_1 = \left[\dfrac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :

$$\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t} &= \mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \\ &= 2\left(-\sin\left((2n+1)\,t\right)\sin t + \mathrm{i}\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t\right)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t.}$$

d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t = \cos\left((2n+2)\,t\right) + \cos\left(2nt\right)$$

donc, comme $2n \neq 0$ et $2n+1 \neq 0$,

$$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin\left((2n+2)\,t\right)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin\left(2nt\right)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Avec la question (b), on peut conclure que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est constante égale à } \pi/2.}$$

2) Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(pt)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(pt)}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement généralisée.
C'est vrai notamment pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.

$$\boxed{\text{Les intégrales considérées sont convergentes.}}$$

3) Comme différence de telles fonctions, φ est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

<u>Prolongement par continuité</u> :

- En $\dfrac{\pi}{2}$: Pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

  Donc $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \varphi(t) = \frac{2}{\pi}$: φ se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.

- En 0 : pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi(t) = \frac{\tan t - t}{t \tan t} = \frac{t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right) - t}{t \tan t} = \frac{\frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)}{t \tan t}$$

Ainsi $\varphi(t) \sim \frac{\frac{t^3}{3}}{t}^2 = \frac{t}{3} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$: φ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

La fonction φ se prolonge en une fonction $\widetilde{\varphi}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Caractère $\mathscr{C}^1$</u> : Nous allons appliquer à $\widetilde{\varphi}$ le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\widetilde{\varphi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

- En $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

- En 0 : $(t - \tan t) \sim -\frac{t^3}{3}$ et $(t + \tan t) \sim 2t$ donc

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t - \tan t)(t + \tan t)}{t^2 \tan^2 t} \sim \frac{-\frac{t^3}{3} \times 2t}{t^4} = \frac{-2}{3}$$

  donc

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}'(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué en $a = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\text{Le prolongement } \widetilde{\varphi} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

4) Puisque $\widetilde{\varphi}$ est C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t) \, \mathrm{e}^{int} \, \mathrm{d}t$$

converge vers 0, et la suite extraite $\left(\alpha_{2n}\right)_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $\left(\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right)$ car $0 \leqslant \left|\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right| \leqslant \left|\alpha_{2n}\right|$. Or

$$\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t) \sin(2nt) \, \mathrm{d}t = J_n - I_n$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(J_n - I_n\right) = 0}$$

5) **a)** La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue donc continue par morceaux sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle.

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = \cos t & v'(t) = -\sin t \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or $|u'(t)v(t)| = \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.
Donc, par théorème de majoration,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

est absolument convergente donc convergente.
Donc le théorème d'intégration par parties nous donne

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

b) La fonction $t \mapsto u = 2nt$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$