Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

c) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 1+t$ et en déduire que $\ell = 0$.

2) (5/2) Justifier autrement et directement que (a_n) converge vers 0.

3) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$.

4) On se propose ici de calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.$$

b) Vérifier l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3} a_{n+1}.$$

c) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\, \mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\, u$.

d) En conclure que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

e) Justifier l'existence et donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p$.

Exercice 2 (MT 2019 PC)

Convergence de $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right)\, \mathrm{d}x$ selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Partie 1 (Préambule)

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Déterminer $\lim_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t} \mathrm{d}t$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Partie 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1) **a)** Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

b) Déterminer I_1.

c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$

en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2) Étudier la convergence des intégrales J_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que la fonction φ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\varphi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - I_n)$? On pensera à utiliser le préambule.

5) **a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(on pourra utiliser un changement de variable).

c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$