Cours : Liste des questions de cours

($\star$) = difficile
(m) = méthode à connaître
(th) = théorème

(c) = classique, peut tomber tel quel
(ci) = classique, peut tomber avec indications
($\spadesuit$) = théorème ou résultat incontournable

1) (c $\spadesuit$) Expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) (c$\star\star$) Démonstration du théorème de Cesàro.

3) (c $\spadesuit$) Limite de la suite $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$ (équivalent de $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$).

4) (ci) Nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.

5) ($\spadesuit$) Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}\,(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

6) (m$\star$) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

7) (m) Limite en 0^+ de $x \mapsto \dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.

8) (m) Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$.

9) ($\spadesuit$) Nature des intégrales : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$

10) (m) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh}\, t}\,\mathrm{d}t$.

11) (ci) Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.

12) (ci) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

13) (mi) Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles.

14) (m) La suite des $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

15) (m) La suite des $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{Arctan}\,(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

16) (m) La série des $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \geqslant 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.

17) (m) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-e^{it}}\,\mathrm{d}t = \pi$.

18) (th) Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

19) (m) Ensemble de définition et caractère $\mathscr{C}^1$ de $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Équation différentielle vérifiée par f, expression de f sans intégrale.

20) (m) Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, f intégrable sur $\mathbb{R}$, et g bornée, montrer que $f * g$ est définie, continue et bornée. Si g est $\mathscr{C}^1$ et g' bornée, $f*g$ est $\mathscr{C}^1$ et expression de $(f*g)'$.

21) (c) Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$.

22) (m$\star$) Pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\qquad \mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \mathrm{Ker}\, u \iff \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$

23) (ci$\star$) Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties.

24) (c) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

25) **(m)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de Tr A, déterminer Ker f et Im f.

26) **(m⋆)** det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$.

27) Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

28) **(c⋆)** Déterminant de Vandermonde (valeur).

29) **(♠)** Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable (définition et 2 théorèmes).

30) **(th)** Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable.

31) **(cm)** Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

32) **(cm)** Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

33) **(c)** Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$, où $a_0, \dots, a_n$ sont des réels 2 à 2 distincts, Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).

34) **(c)** Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire.

35) **(m)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\left[\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T AY = 0\right] \Longrightarrow A = 0$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $\left[\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0\right] \Longrightarrow u = 0$.

36) **(ci)** Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

37) **(ci)** Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et une isométrie.

38) **(c)** Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

39) **(m)** Un projecteur p de E euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve).

40) Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.

41) **(cm)** Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Pour tout $x \in E$, $\inf(\mathrm{Sp}\,(f))\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \sup(\mathrm{Sp}\,(f))\|x\|^2$.

42) **(♠)** Tableau des lois de probabilités usuelles, complet (avec séries génératrices). *Connaître les lois usuelles, c'est l'analogue des DL usuels en analyse : incontournable.*

43) **(♠)** Formule des probabilités totales, système complet d'événements.

44) **(cm)** Loi conditionnelle : Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclos.

45) **(m)** Loi de couple : On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

46) **(cm)** Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
- Donner la loi de $X + Y$ lorsque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
- Donner la loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.

47) **(♠)** Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle (exp, cos, sin, sh , ch), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1 + x)$, $\ln(1 - x)$, $\mathrm{Arctan}\,(x)$), $(1 + x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

48) **(m)** Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.

49) **(m)** Rayon et somme de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$. de $\sum d_n z^n$, où d_n est la n-ème décimale de π.

50) **(mi)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln 2-1.$

51) **(mi)** $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}.$

52) $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geqslant 0\right\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$.

53) La boule ouverte $B(0,\rho)$ est ouverte.

54) **(m)** $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x+y\leqslant 1\right\}$ est convexe.

55) **(m$\star$)** Si $A\subset E$ est convexe, alors $\bar{A}$ est convexe.

56) **($\star$)** Étude des limites en $(0,0)$ de $(x,y)\mapsto\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $(x,y)\mapsto\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

57) **(cm$\star$)** det : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est continue et $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné.

58) **(cm$\star$)** Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$, alors $M=\lim\limits_{k\to+\infty}A^k$ est la matrice d'un projecteur.

59) **(m)** Étude des extrema de $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1$ sur $\Omega=\mathbb{R}^2$.