

On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans toute la feuille, les résultats restent vrais.

I) Rappels de PCSI

A) Noyau et image

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Lorsqu'on parle de noyau et d'image, il s'agit toujours du noyau d'une application linéaire, ou de l'image d'une application linéaire¹.

On peut vous demander d'étudier $\text{Ker } A$ ou $\text{Im } A$. Ce sont des abus de notation, il s'agit en fait d'étudier l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto AX \end{cases}$$

Ainsi, avec $A = \left(C_1 \mid \dots \mid C_n \right)$,

- $\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$.
(d'où « $A \in \text{Ker } (I_n - A) \iff (I_n - A)X = 0$ »).
- $\text{Im } A = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \exists X \in \mathbb{R}^n, Y = AX\}$

$$= \text{Vect} \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Vect} (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

$\text{rg } A = \dim \text{Im } A$. Il faut savoir calculer le rang d'une matrice.

Et le théorème du rang, avec l'espace de départ $E = \mathbb{R}^n$.

$$\dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = \dim \mathbb{R}^n$$

$$\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = \dim \mathbb{R}^n$$

B) Base

Lorsque vous êtes dans un espace vectoriel de dimension n , une famille libre de n vecteurs est automatiquement une base. J'insiste une nouvelle fois...

II) Réduction

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans tout le paragraphe, les résultats restent vrais.

A) Le cas $\lambda = 0$

Le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est le noyau :

$$E_0 = \text{Ker } (0I_n - A) = \text{Ker } (-A) = \text{Ker } A$$

Car $-AX = 0 \iff AX = 0$.

Donc on a les conséquences suivantes (ce sont même des équivalences) :

$$\begin{aligned} \text{rg } A < \dim \mathbb{R}^n = n &\implies \dim \text{Ker } A > 0 && (\text{théorème du rang, cf A}) \\ &\implies E_0 \neq \{0\} \\ &\implies 0 \text{ est valeur propre de } A \end{aligned}$$

1. En algèbre linéaire : dans ce que vous voyez cette année.

B) Le cas général $\lambda \in \mathbb{R}$

Le raisonnement précédent reste valable, en remplaçant A par $\lambda I_n - A$. (ce sont toujours des équivalences, même si je ne précise que le sens le plus utile)

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\lambda I_n - A) < \dim \mathbb{R}^n = n &\implies \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) > 0 && (\text{théorème du rang, cf A}) \\ &\implies E_\lambda \neq \{0\} \\ &\implies \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \end{aligned}$$