Épreuve de Mathématiques 9

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

1) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2) **a)** Démontrer que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

Indication : *On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.*

b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Calculer $\varphi(1)$.

4) **a)** Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x \right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Justifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et id l'endomorphisme identité de E_n.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \to t^k e^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

4) Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, \mathrm{d}t$$

5) Soit $g \in E_n$ telle que $g = L(f)$. Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$.

6) En déduire Ker L.

7) **a)** Calculer $L(e_0)$.

b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.

c) En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

8) Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9) Recherche des sous-espaces propres de L.
Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$. $(\star)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\star)$.

d) Déterminer les solution polynomiales de l'équation différentielle $(\star)$.

e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10) Comparer L^{-1} et $D + \mathrm{id}$.

11) Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12) Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $P_i(X) = X^i$. La base canonique de E est $(P_0(X), \dots P_n(X))$.
Soit $(a_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.
Pour tout coule (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2) Soit P un polynôme de E. Calculer $(P|P_0)$.

3) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

a) Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

b) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(.|.)$.

c) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

e) Déterminer $\sum_{j=0}^{n} L_j$.

4) Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.

5) Soit Q un polynôme de E.

a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

Exercice 4 (Étude d'une famille de séries entières)

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs
Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.
Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.
L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Partie 1 (Quelques propriétés des fonctions f_α)

1) Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

2) Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.*

3) On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

4) Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

5) Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

6) Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

7) Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.

8) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance. Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie 2 (Un logarithme complexe)

1) Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1 + x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

4) Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

5) On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

6) Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

FIN DE L'ÉPREUVE