Épreuve de Mathématiques 9

Correction

4

Exercice 1 (E3A PC 2020)

cf Rapport du jury.

Exercice 2 (E3A PC 2020)

Idem.

Exercice 3 (CCINP PC 2020 — UPS)

Partie I - Préliminaires

1) Soit $x > 0$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t} = \dfrac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.
$u(t)v(t) = \dfrac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
D'où, par intégration par parties, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.
• $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \dfrac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.

3) Soit $x \geqslant 0$.
$t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t) - \sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt} \\ &= \frac{-x\cos(t) + \sin(t) + x^2\sin(t) + x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt} \\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$

donc $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4) • Soit $x > 0$.
Pour tout $t > 0$, $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leqslant +\infty$"), on a :

$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

• Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

5) Soit $a > 0$.

- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geqslant a > 0$).
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x \geqslant a$,
$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \geqslant a$, pour tout $t > 0$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t),$$
où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a > 0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant a$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

6) F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc F est dérivable sur $\bigcup\limits_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = -\left[u(x,t)\right]_0^{+\infty} = -\left(0 + \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + K.$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, donc $-\frac{\pi}{2} + K = 0$, donc $K = \frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

7)
- Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
- Pour tout $t \in]0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

8) Soit $x \in [0,1]$.
• Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right) = \frac{1}{t^2} \times \underset{t\to+\infty}{O}(1) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.
• Posons $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$, $w(t) = u(x,t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
$w(t)v(t) = \dfrac{u(x,t)}{t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$
$\displaystyle\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)dt = -\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.
D'où, par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt \\ &= \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt. \end{aligned}$$

9) •
- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.
- Pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.
• De plus, $x \mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

10) • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.
• On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 (CCINP PC 2020 — UPS)

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Partie I - Calcul de p_n

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k, donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ modélise la positition du pion à l'instant n.
Comme $S_0 = 0$, S_0 modélise aussi la position du pion à l'instant 0.

2) $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$. Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$. Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in X_1(\Omega)} = (X_1 = -1, X_1 = 1)$, on a

$$\begin{aligned}
p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \cap X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1 \cap X_1 + X_2 = 0) \\
&= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3) Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.
Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).

4) On a $Y_k(\Omega) = \left(\dfrac{X_k + 1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\dfrac{1+1}{2}, \dfrac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\dfrac{X_k + 1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

5) • Les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.
Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• De plus,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $S_n = 2Z_n - n$.

6) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leqslant 1$, donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1x^n$, c'est-à-dire $R_p \geqslant 1$.

8) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m}k}{2^m\prod_{k=1}^{m}k} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m} \end{aligned}$$

9) D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $R_p \geqslant 1$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n}. \end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha - k + 1)$ pour tout $n \geqslant 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T = n \Rightarrow S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leqslant P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
• $S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T \geqslant 2$ et $T = 2 \Leftrightarrow S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

11) • Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leqslant P(T = n),$$

donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant P(T = n)$.
Or $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(T = n)$ converge (et vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
• Comme $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$, donc, en particulier, pour $x = 1$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n(1)$ converge, ce qui assure que

$$R_q = \sup\{\rho > 0 : \sum_{n \geqslant 0} q_n \rho^n \text{ converge}\} \geqslant 1.$$

12) f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1, 1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}$$

13) • Comme, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1 - x^2)^{-1/2} g(x) = (1 - x^2)^{-1/2} - 1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

• Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n,$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

14) Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, q_{2n+1} = 0)\,.$$

15) • Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ (d'après la questin 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.
En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en 13)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16) *Pour me raccrocher au programme, je vais alors considérer que* $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty.$$

g est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.

FIN DE L'ÉPREUVE