

Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2024)

1. Questions de cours

$$1.1. \quad \forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

$$1.2. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1.3. Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

$$2. 2.1. \quad \{Y = 0\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{X = 2j\} \quad \text{et} \quad \{Y = 1\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{X = 2j + 1\}$$

2.2. $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y suit une loi de Bernoulli. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2j + 1) && \text{union disjointe} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2j+1}}{(2j+1)!} && \text{loi de Poisson} \\ &= e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda) \end{aligned}$$

De plus $E(Y) = 0 \times \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1)$:

$$Y \sim \mathcal{B}(e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda)) \quad \text{et} \quad E(Y) = e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda)$$

3. 3.1. $T(\Omega) = \{kn \mid k \in \{1, 2\} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$T(\Omega) = \mathbb{N}$$

3.2. D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'évènements, suggéré par l'énoncé, $(Z = n)_{n \in Z(\Omega)}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}(\{T = k\} \cap \{Z = 1\}) + \mathbb{P}(\{T = k\} \cap \{Z = 2\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = 1\}) + \mathbb{P}(\{2X = k\} \cap \{Z = 2\}) && \text{car } T = XZ \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(2X = k)) && \text{car } X \perp\!\!\!\perp Z \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(2X = k))$$

3.3. Comme $(2X = 2k + 1) = \emptyset$ et $(2X = 2k) = (X = k)$, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2k) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \frac{\lambda^k}{k!} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T = 2k + 1) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3.4. Comme $\{T \in 2\mathbb{N}\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{T = 2k\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \in 2\mathbb{N}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} (\text{ch}(\lambda) + e^\lambda) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \text{ch}(\lambda) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(T \in 2\mathbb{N}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\lambda} \text{ch}(\lambda)$$

On peut aussi regarder les événements attentivement : 2 divise le produit XZ si et seulement si 2 divise X ou Z . D'où $(T \in 2\mathbb{N}) = (Z = 2) \cup (X \in 2\mathbb{N})$ et, par formule du crible, indépendance et calcul de $\mathbb{P}(Y = 0)$, on conclue.

Exercice 2 (CCP 2010 TSI, partiel)

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

1) Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t/x}}{1+t}$ est continue, donc continue par morceaux, et positive sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée, comme $1/x > 0$,

$$t^2 f(t) \sim t e^{-t/x} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Conclusion :

$$\varphi(x) \text{ existe pour tout } x > 0$$

2) *Rédaction* : il faut savoir structurer sa réponse, lorsqu'il y a beaucoup d'étapes dans une question.

- Intégrabilité de ψ : Posons

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \psi(t) = \frac{t e^{-t/b}}{a^2(1+t)}$$

La fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: De même qu'au 1, par croissance comparée, comme $1/b > 0$,

$$t^2 \psi(t) \sim t^2 e^{-t/b} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $\psi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} \psi(t) dt$ converge (absolument, car $\psi \geq 0$).

- Majorations : Soit $t \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$0 < a \leq x \implies \frac{t}{x^2} \leq \frac{t}{a^2}$$

Et

$$0 < x \leq b \implies \frac{t}{b} \leq \frac{t}{x} \implies e^{-\frac{t}{x}} \leq e^{-\frac{t}{b}}$$

En conclusion,

$$0 \leq \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)} \leq \frac{te^{-t/b}}{a^2(1+t)} = \psi(t)$$

Quand la majoration n'est pas immédiate, il faut justifier (au moins 1 étape intermédiaire), et il vaut mieux déplacer les calculs en « préliminaires ».

- Théorème de dérivation : Posons

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times [a, b], \quad h(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

Avoir une dérivée partielle juste est fondamental. Prenez votre temps, décomposez, mais la dérivée doit être juste. On dérive par rapport à x . $e^{-\frac{t}{x}} = e^u$, $(e^u)' = u'e^u$. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (tx^{-1}) = -tx^{-2}$. Etc.

- $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et

$$\forall x \in [a, b], \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$$

- $\forall x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'après 1)) ;
la fonction $t \mapsto \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus est **intégrable sur** $[0, +\infty[$ d'après ci-dessus et, toujours d'après les calculs ci-dessus,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b] \text{ et } \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)} dt.$$

- 3) D'après la question précédente, la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi \text{ est classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

On vous donne l'équation différentielle, vous avez y et y' : vérifiez si en remplaçant – tout bêtement – le résultat tombe. Au pire, vous aurez des idées pour une éventuelle intégration par parties.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} x^2 \varphi'(x) + \varphi(x) &= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\frac{t}{x}}}{1+t} + \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt \\ &= \left[\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{-1/x} \right]_0^{+\infty} \\ &= x \end{aligned}$$

Conclusion :

φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

- 4) a) Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, F est $\mathcal{C}^1$ sur $] - R, R[$ (à l'intérieur du domaine de convergence) et

$$\forall x \in] - R, R[, \quad F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in] - R, R[, \quad x^2 F'(x) + F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n-1) a_{n-1} + a_n] x^n \quad (\text{décalage d'indices}) \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité du développement en série entière,

$$\begin{aligned} F \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur }] - R, R[&\iff \forall x \in] - R, R[, \quad a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n-1) a_{n-1} + a_n] x^n = x \\ &\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ 0 + a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, \quad (n-1) a_{n-1} + a_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = -(n-1) a_{n-1}$

- b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad a_n = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$: est vraie d'après a).
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. $a_{n+1} = -n a_n = (-1)^{n+2} n!$ d'après a) ($n+1 \geq 2$). Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :

$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_n = (-1)^{n+1} (n-1)!$

- c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n = a_n x^n = (-1)^{n+1} (n-1)! x^n$.

$$\forall x \neq 0, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+2} n! x^{n+1}}{(-1)^{n+1} (n-1)! x^n} \right| = n|x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty > 1$$

Donc, d'après d'Alembert, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, $\boxed{R=0}$

Vu le coefficient, ce n'est pas étonnant. Cf. l'exercice 1 de la feuille sur les séries entières.

En conclusion

L'équation $(\mathcal{E})$ n'admet pas de solution développable en série entière sur un intervalle $] - R, R[$, quel que soit $R > 0$.

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k+2} e^{-\frac{t}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad t^2 \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim \frac{t^{n+3} e^{-\frac{t}{x}}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt \quad \text{existent}$$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 1). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$$

$$3) \quad a) \quad I_0(x) = \left[\frac{e^{-t/x}}{-1/x} \right]_0^{+\infty} = x.$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties. Soit $u = \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$ par croissance comparée, par théorème d'intégration par parties, les deux intégrales $\int_{\mathbb{R}} u'v$ et $\int_{\mathbb{R}} uv'$ sont de même nature – convergente d'après la question 2. De plus,

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} (-1/x) e^{-t/x} dt = \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $I_{k+1}(x) = (k+1)x I_k(x)$

c) La relation de récurrence est quasiment la même qu'en partie 1, question 4a. Et pour cause : on calcule là aussi le développement en série entière de φ . Ce n'est pas choquant l'obtenir la même expression. Par contre, dans cette partie, on maîtrise le reste, i.e. l'écart entre φ et la somme partielle de la série entière. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k! x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie d'après a).

- $\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \stackrel{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$.
Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 0 \quad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

Vous devez savoir faire le calcul de $I_k(x)$ sans aucune question intermédiaire : c'est un classique.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt && \text{d'après la question 2} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k!x^{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt && \text{d'après la question 3c} \end{aligned}$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \right| dt$$

Or $0 < \frac{1}{1+t} \leq 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraîne,

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}} dt = I_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| \leq (n+1)!x^{n+2}}$$

b) $u_n \neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$

Donc pour tout $n \in \{0, \dots, 8\}$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$).

Pour $n \geq 8$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et la suite devient croissante. Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$$

c) $\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=0}^8 (-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après a)

$$|R_8(1/10)| \leq 9!(1/10)^{10} = 3,6288 \times 10^{-5}$$

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\frac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\sum_{k=0}^8 (-1)^k I_k(1/10)$.

5) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k!z^{k+1}$.

$$\left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = (k+1)|z| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty > 1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{k \geq 0} (-1)^k k!z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \frac{1}{10}$.

On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$. Grâce à la maîtrise du reste de la série.

La partie 1 montre que φ est solution de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ n'a pas de solution développable en série entière en 0. Donc nous savions déjà que φ n'était pas développable en série entière.

Exercice 3 (Mines Ponts PSI 2024)

Une marche aléatoire !

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_n = \frac{1 + X_n}{2}$. Comme $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$, $Y_n \sim \mathcal{B}(p)$, et $p = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

Or X_n est centrée : $E(X_n) = -\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = -1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) = p - 1/2 = 0$. Donc

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\frac{1 + X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

- 2) *Un indice d'égalité est un indice de passage par l'origine. Déjà fait en exercice.*

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition d'un indice d'égalité, $A_i = (S_{2i} = 0)$.

Avec les $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définis à la question précédente, $X_k = 2Y_k - 1$, donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = 2 \left[\sum_{k=1}^n Y_k \right] - n$$

Or, par le lemme des coalitions, $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, et elles suivent une loi de Bernoulli de même paramètre $p = 1/2$.

Donc leur somme $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k = (S_n + n)/2$ suit une loi binomiale de paramètre $1/2$:

$$Z_n = \frac{1}{2}(S_n + n) \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$$

Ainsi, comme $(S_{2i} = 0) = (Z_{2i} = i)$ et $\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}}$,

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(S_{2i} = 0) = \binom{2i}{i} \frac{1}{2^{2i}}$$

- 3) Si $n - \ell$ est impair, $n + \ell$ aussi et $(S_n = \ell) = (Z_n = \frac{\ell + n}{2}) = \emptyset$:

$$\mathbb{P}(S_n = \ell) = 0$$

Si $n - \ell$ est pair, $(S_n = \ell) = (Z_n = \frac{\ell + n}{2})$ et, d'après 2,

$$\mathbb{P}(S_n = \ell) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{(\ell + n)/2}$$

Si $k > n$ ou $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$.

- 4) Comme (c_n) et (d_n) sont à termes positifs, le théorème de comparaison nous donne $\sum d_n$ diverge.

De plus, $c_n \sim d_n$ s'écrit $c_n = d_n + o(d_n)$. En notant $a_n = c_n - d_n$, il vient

- La suite (a_n) n'est pas forcément non nulle... mais (d_n) l'est.
- D'après ci-dessus, $a_n = o(d_n)$,
- Par hypothèse, $d_n > 0$ et $\sum d_n$ diverge

Donc, d'après le théorème de l'énoncé (en ignorant l'hypothèse (a_n) non nuls),

$$\sum_{k=1}^n a_k = o\left(\sum_{k=1}^n d_k\right)$$

Or $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n c_k - \sum_{k=1}^n d_k$, d'où

$$\sum d_n \text{ diverge et } \sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k$$

5) $N_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc N_n est finie et admet une espérance.

Soit f_{A_i} la variable aléatoire qui vaut 1 si $2i$ est un indice d'égalité de $(X_1, \dots, X_{2n})$, et 0 sinon¹.

Par définition, $N_n = \sum_{i=0}^n f_{A_i}$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(f_{A_i})$$

$$\text{Or } \mathbb{E}(f_{A_i}) = 1 \times \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} :$$

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

6) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est décroissante sur $]0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow & \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \quad \text{croissance de l'intégrale} \\ \Rightarrow & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow & -\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow & \frac{1}{n} f(1) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \end{aligned}$$

De plus, en reprenant les inégalités de gauche pour $k=0$, il vient $f(1/n) \leq f(t)$ sur $]0, 1/n]$ puis

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$$

(Ici, il faut être très précis : f n'est pas définie en 0 donc le terme de droite n'existe pas à droite pour $k=0$. Par contre, on ne peut pas se contenter de jeter le résultat pour $k=0$: il nous faut l'inégalité de gauche.)

D'où

$$\frac{1}{n} f(1) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt$$

Or l'intégrale converge, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(1) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$. Par encadrement,

$$\text{La somme de Riemann } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t) dt \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

1. Donc elle vaut 1 sur A_i et 0 ailleurs : c'est 1_{A_i} , la fonction indicatrice de A_i .

b) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue, décroissante et intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Donc, d'après la question 6a,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n}{k}} = \int_0^1 t^{-1/2} dt = 2$$

Ainsi, comme $\lambda = 2 \neq 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2$, puis

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

7) Soit $d_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. Or, d'après Stirling, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donc

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &\sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

D'où $d_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. *Vu le coefficient est quasiment le même que pour la question de cours facultative – un classique – le calcul est aussi le même.*

Ainsi, (d_n) et $(c_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$ sont deux suites de nombres réels strictement positifs tels que $c_n \sim d_n$.

Et $\sum c_n$ diverge (Riemann, $\alpha = 1/2 \leq 1$).

Ainsi, d'après la question 4, $\sum d_n$ diverge et $\sum_{k=1}^n d_k \sim \sum_{k=1}^n c_k$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^n d_k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En utilisant le résultat de la question 6b, il vient

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n)_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE