Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 10 mars 2025

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions sh et ch ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, sh et ch.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions exp, sh et ch .

Exercice 2

Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)
On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x \qquad (\mathscr{E})$$

1) Justifier l'existence de $\varphi(x)$, pour tout $x > 0$.

2) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et donner, pour $x \in [a, b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

3) En déduire que φ est classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

4) On suppose qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme F est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-R, R[$.

- **a)** Déterminer une relation de récurrence liant a_n et a_{n-1}, pour tout $n \geqslant 2$.
- **b)** Déterminer l'expression de (a_n) en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **c)** Quel est le rayon de convergence de F ? Que peut-on en déduire ?

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)
Désormais, $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

2) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

- **a)** Calculer $I_0(x)$.
- **b)** Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.
- **c)** En déduire que $I_k(x) = k!x^{k+1}$.

4) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}$.

b) On suppose désormais que $x = \dfrac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$.

c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes ?

On donne : $9! = 362880$.

5) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\dfrac{1 + X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l'entier $n \geqslant 1$. On appelle *chemin*, tout $2n$-uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1 .

Si $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle *indice d'égalité*, tout entier $k \in [\![1, 2n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 0$.

On remarquera alors qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le $k-$uplet $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales is -1 .
On note $N_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega))$.
On note pour tout entier i entre 1 et n, l'événement A_i défini par

$$A_i = \{\omega,\ 2i \text{ est un indice d'égalité de } (X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega))\}$$

2) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$, pour tout entier i entre 1 et n.

3) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geqslant 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell - n$ est pair ou impair, calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$.

On admet sans démonstration le résultat suivant :
Théorème 1 *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $a_n = o(b_n)$ au voisinage de $+\infty$ et la série $\sum_n |b_n|$ est divergente. Alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

4) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$ et la série $\sum\limits_n c_n$ diverge.

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, montrer que la série $\sum\limits_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

5) Montrer que la variable aléatoire N_n admet une espérance finie et que son espérance $\mathbb{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

Indication : on pourra exprimer la variable N_n à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements A_i.

6) **a)** Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $]0,1]$. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que la somme de Riemann $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

b) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}$$

où la constante λ est à préciser.

7) En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(N_n)_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$

FIN DE L'ÉPREUVE